

مقارنة أداء هيكل قنينة بلاستيكية بناءً على طريقة العناصر المحدودة Comparison of PET Bottle Structure Performance Based on Finite Element Method (FEM)

علي محمد أحمد الغويل
Ali Mohamed Elghawail
كلية التقنية الصناعية-مصراثة
Ali75lby@cit.edu.ly

ملخص:

في السنوات الأخيرة أصبحت مادة البولي إيثيلين تريفثالات (Polyethylene Terephthalate PET) من أحد أكثر البوليمرات استخداماً بعد البولي إيثيلين (PE) والبولي بروبيلين (PP) في عدة تطبيقات. تعتبر صناعة قنينات المياه والعصائر من أهم تلك التطبيقات وذلك بسبب خواص المادة الفيزيائية مثل الشفافية والصلابة والخواص الكيميائية حيث يعتبر خاملاً كيميائياً. في هذا البحث تم دراسة شكلين مربع ودائري لقنينة 7 لتر والتي تستخدم محلياً في تعبئة مياه الشرب بكثرة وذلك بتحليل سلوكها في حالة التحميل العلوي من خلال توزيع الإجهادات وتأثيرها على هيكل القنينة لضمان الأداء الجيد مع استخدام أقل وزن من مادة الـ PET حتى يكون تأثيرها أقل على البنية. تمت دراسة الأداء الهيكلي لتصميمات القنينة المختلفة بواسطة طريقة العناصر المحدودة (Finite Element Method FEM) باستخدام برنامج Abaqus. حيث أظهرت نتائج الدراسة أن القنينة ذات الشكل الدائري أفضل من القنينة مربعة الشكل من خلال مقاومتها للتحميل العلوي وانتظام توزيع الإجهادات على هيكل القنينة وذلك لتماثل الأبعاد من مركز القنينة وعدم وجود اختلاف مفاجئ في أبعاد التصميم بخلاف الشكل المربع.

الكلمات الاستدراكية: مادة الـ PET ، هيكل القنينة، التكديس، Abaqus

Abstract:

In recent years, Polyethylene Terephthalate (PET) has become one of the most widely used polymers after polyethylene (PE) and polypropylene (PP) in several applications. The manufacture of water and juice bottles is one of the most important of these applications due to its physical properties such as transparency, hardness, and chemical properties, as it is considered chemically inert. In this research, two shapes, square and circular, were studied for a 7-liter bottle, which is used locally in bottling drinking water in abundance, by analysing its behaviour in the case of top loading through stress distribution and its effect on the bottle structure to ensure good performance with less usage weight of PET in order to have less impact on the environment. The structural performance of different bottle designs was studied using the Finite Element Method (FME) with Abaqus software. The results has shown that, the bottle with a circular shape is better than the bottle with a square shape through its resistance to the upper load and the uniformity of the distribution of stresses on the bottle structure due to the similarity of the dimensions from the center of the bottle and the absence of a sudden difference in the dimensions of the design unlike the square shape.

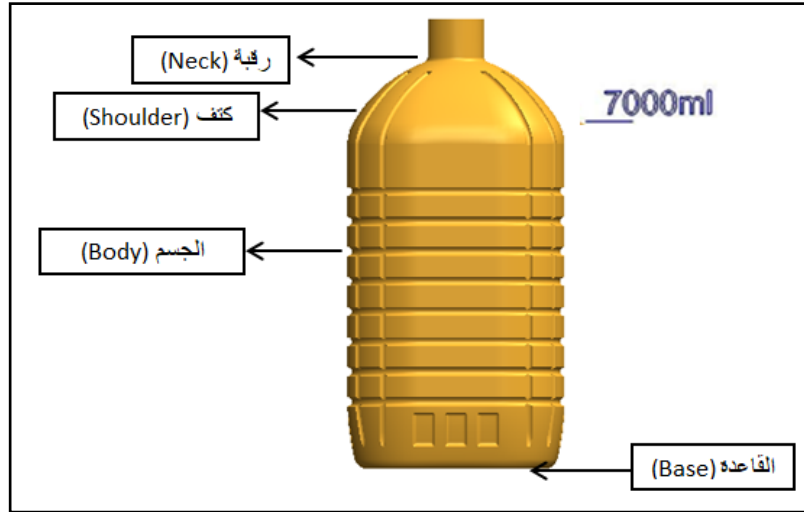
1. المقدمة:

نظراً لخصائصه التي يتميز بها عن غيره من المواد البلاستيكية، يتم استخدام مادة الـ PET على نطاق واسع عالمياً ومحلياً في صناعة تغليف المواد الغذائية، وخاصة لإنتاج قنينات مياه الشرب ذات العبوات المختلفة منها 0.5، 1.5، 7، 10 لتر. تعتبر عملية التشكيل بالتمديد والنفخ ألياً أو نصف ألي أهم طرق تصنيع قنينات المياه، حيث تخضع المادة البلاستيكية لتصلد إنفعالي أثناء عملية التصنيع ناتج عن التمديد داخل تجويف القالب ونفخها بواسطة هواء عالي الضغط لتأخذ شكل تصميم القالب، حيث يعتبر حدوث

التصلد الإنفعالي أمر مهم لتشكيل قنينة ذات جدار موحد السمك. تتعرض القنينة لضغوط وقوى مختلفة أثناء عملية الإنتاج والإستعمال، لذا وجب إختيار التصميم الأمثل للقنينة بشكل يقاوم هذه المؤثرات المادية مع الحفاظ على الشكل المحدد مسبقاً. إن سلوك التشوه الذي تظهره القنينة البلاستيكية في عمرها هو دالة في التصميم، الشكل، خصائص المادة، متغيرات عملية التشكيل و ظروف التحميل[1]، وبالتالي نحن في حاجة لدراسة أداء قنينة البلاستيك أخذين في الإعتبار كل هذه المتغيرات للوصول الى التصميم الأمثل. تعد الطرق التحليلية بواسطة البرامج الهندسية أكثر إنتشار من التجارب المعملية هذه الأيام، حيث تستغرق القياسات المعملية وقتاً أطول مع تكلفة باهظة لذا أصبحت النمذجة والمحاكاة من أهم الأدوات المستخدمة للتنبؤ بمدى نجاح التصميم الهندسي تحت ظروف مختلفة لعملية التشغيل وإختيار الأمثل. في هذه الدراسة تم التحقيق من مدى تأثير الشكل والتصميم على أداء قنينة الـ PET عينة 7 لتر بواسطة النمذجة والمحاكاة عن طريق برنامج Abaqus. لنذرة الدراسات على المستوى المحلي المهتمة بشكل رئيسي بهذا الجانب، بينما هناك عدة بحوث ودراسات عالمياً إهتمت بطرق إنتاج قنينات تعبئتها المياه ذات العبوات الصغيرة وكيفية الحصول على أفضل منتج بأقل وزن ممكن من مادة الـ PET لما لها من أثر سلبي على البيئة.

2. الدراسات السابقة

يعتبر الإطلاع على البحوث والدراسات السابقة حول نقطة البحث المستهدفه مهم جدا لكي تتعمق في فهم طبيعة البحث أكثر مع إمكانية تقادي أخطاء السابقين، بالإضافة الى الحصول على العديد من المراجع التي يمكن الإستفادة منها خلال الدراسة الحالية. ومن بعض هذه الدراسات السابقة التي كانت في إستخدام FEM لدراسة أداء هيكل القنينات البلاستيكية في المراحل الأولية للتصميم للوصول الى الشكل والتصميم الأفضل للقنينة. حيث قام Panos Jarod and باستخدام طريقة العناصر المحدودة لمعرفة طبيعة توزيع الإجهادات على هيكل قنينة مصنعة من مادة الـ PET ذات عبوة 600 مل. حيث أظهرت النتائج بأن أقصى قيمة للإجهادات تحدث عند قاع القنينة[2]. أما Thusneyapan and Suvanjumrat إستخدما المحاكاة لإختبار السقوط الحر للقنينة بلاستيكية بأشكال وتصاميم هيكلية مختلفة. أثبتت النتائج المتحصل عليها بأن القنينة ذات السطح الأملس الخالي من الحواف له مقاومة إسطدام أفضل. [3] كما تناولت الدراسة التي قام بها Hu وآخرون بحساب حمل الإنبعاج وتوزيع الجهود على سطح قنينة من مادة الـ PET وذلك بواسطة طريقة العناصر المحدودة وإستخدام نتائج التحليل لتصميم وتحسين قنينة بأقل وزن ممكن مع أعلى قابلية تحمل لقوى الإنبعاج. [4] وهدفت دراسة Miranda وآخرون لتحسين تصميم قنينة بلاستيكية من مادة الـ PET سعة 500 مل عن طريق المحاكاة بمساعدة البرامج الهندسية، تم إثبات صحة التصميم الأمثل للقنينة من خلال تصنيع وإختبار نموذج أولي لها. حيث خلصت النتائج بأن التصميم الأمثل قلل من وزن القنينة الأصلية بنسبة 21% تقريباً[5]. أما دراسة Kandachar PV أثبتت بأن شكل القنينة وظروف عملية إنتاجها، تحفز على زيادة ظهور التمدد لسطح القنينة عند تعرضها لقيم منخفضة جداً من الإجهاد المسلط مما يؤدي الى فشل سابق لأوانه تحت التحميل[6]. توظيف البرامج الهندسية لنمذجة وتحليل النماذج سمح بتقليل حدوث مثل هذه العيوب وتقاديتها في مراحل مبكرة وذلك بتطوير طرق إنتاج العبوات البلاستيكية، حيث تم توظيف تقنية النمذجة المطورة أثناء إختبار الصدمه للتنبؤ بأداء عبوات المياه [7]. إن فهم أبعاد التصميم يساعد على إمكانية تحسين أبعاده بناءً على زيادة مقاومة الإنبعاج. يوضح الشكل (1) أسماء أجزاء قنينة 7 لتر بشكل عام.



شكل (1) أسماء أجزاء قنينة بلاستيكية عبوة 7 لتر.

3. منهجية تطبيق طريقة العناصر المحدودة:

في هذه الدراسة، استخدمت طريقة العناصر المحدودة لتقييم التصميم المقترح للقنينة ومقارنة الأداء في حالة تعرضها للأحمال وعند تغييره لشكل آخر. Abaqus CAE 6.9 استخدم كأداة لتطبيق FEM في هذا البحث. حيث أن لكل مشكلة ظروف خاصة بها عند تحليلها ولكن الإجراء المتبع عند المحاكاة في الأغلب متشابه. المخطط رقم (1) يوضح خطوات المحاكاة باستخدام برنامج Abaqus والتي أتبع في هذه الدراسة. صمم شكل القنينة بالحجم المطلوب ثلاثي الأبعاد على برنامج Solidworks وبالسلك الذي يحقق وزن 70 جرام للقنينة [8] ووزن علي هيئة ملف CAD نو إمتداد STEP والذي بالإمكان استيراده لبرنامج التحليل. يتم تحميل نموذج CAD لشكل القنينة إلى برنامج تحليل العناصر المحدودة (FEA) لمحاكاة سلوكه تحت تأثير إختبار الحمل العلوي. تم الحصول على خواص المادة البلاستيكية لنموذج القنينة من أحد الأبحاث السابقة وإستخدامها في هذه الدراسة [9]. من بين النماذج المتوفرة في برنامج المحاكاة تم إستخدام نموذج Van Mises model للتحقق من تأثير الحمل المسلط على القنينة.

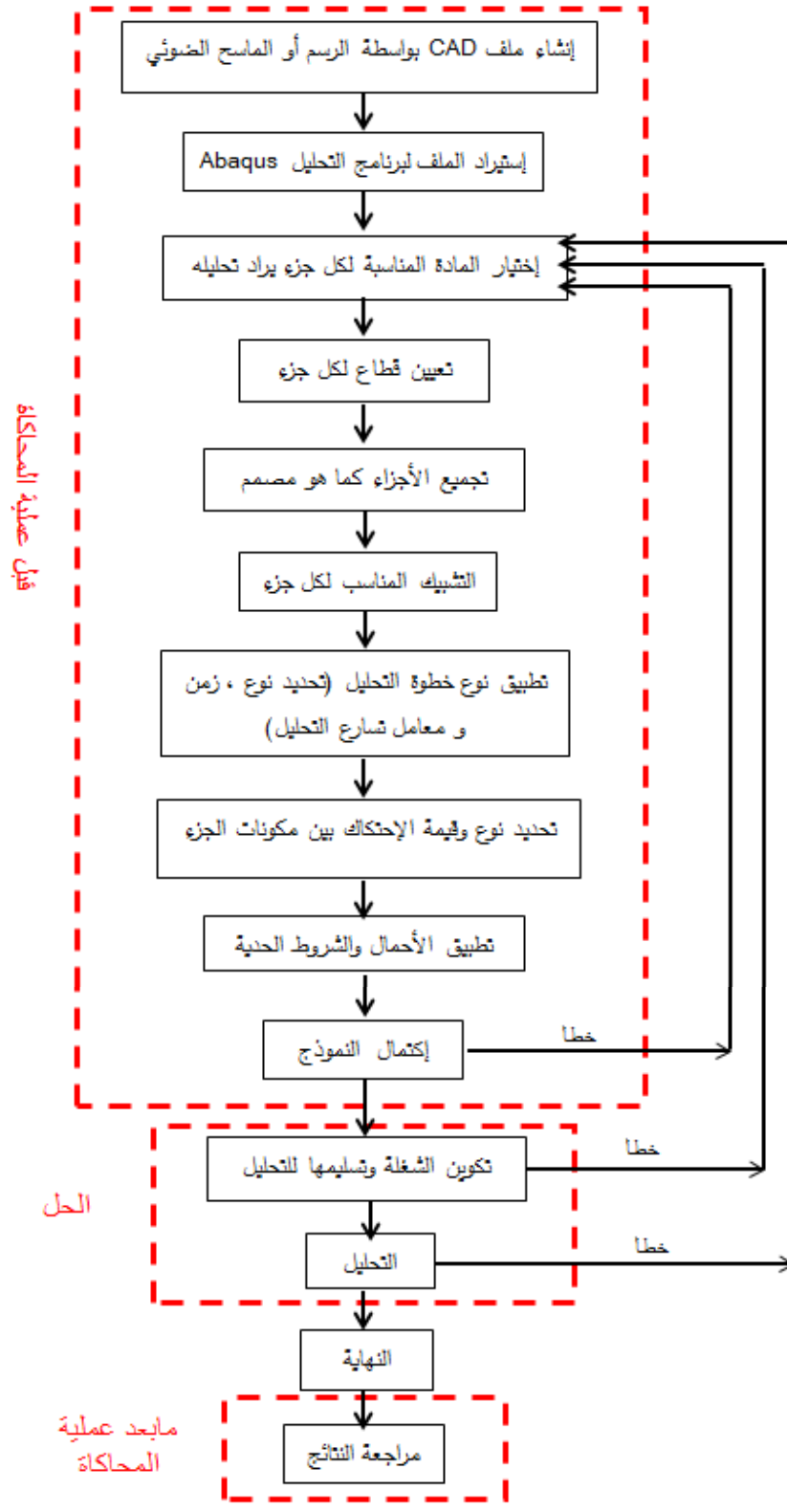
4. خواص مادة الـ [9] PET:

1.4 الكثافة: 1335 كجم/م³

2.4 الخواص المرنة: الجدول رقم (1) يحتوي على خواص المادة في منطقة المرونة، وهي عبارة عن ثوابت هندسية يتم إدخالها لبرنامج Abaqus المستخدم في إجراء عملية المحاكاة لكي تعبر عن تصرف المادة في منطقة المرونة (تشكيل مؤقت) تحت تأثير القوى التي تتعرض لها القنينة.

الخواص المرنة

جدول (1).



مخطط (1) خطوات التحليل بطريقة العناصر المحدودة في برنامج Abaqus [10]

E_2 (Mpa)	1254.74
E_3 (Mpa)	1254.74
V_{11}	0.4
V_{22}	0.4
V_{33}	0.4
G_{12} (Mpa)	448.12
G_{23} (Mpa)	480.05
G_{33} (Mpa)	448.12

3.3 الخواص اللدنة: تعبر الخواص اللدنة للمادة عن سلوكها تحت تأثير الأحمال في منطقة اللدونة (التشكيل الدائم)، الجدول رقم (2) يحوي قيم إجهاد الخضوع (σ_y) وأقصى إجهاد شد (σ_{uts}) للمادة البلاستيكية.

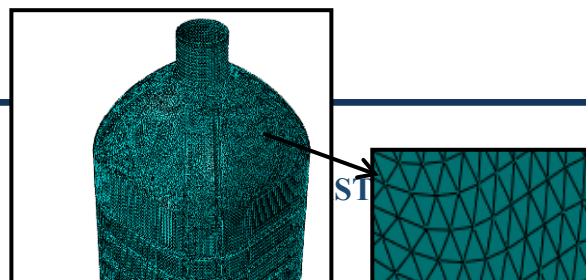
جدول (2). الخواص اللدنة

إجهاد σ (Mpa)	إنفعال ϵ
75.49 (σ_y)	0
155.26 (σ_{uts})	0.928

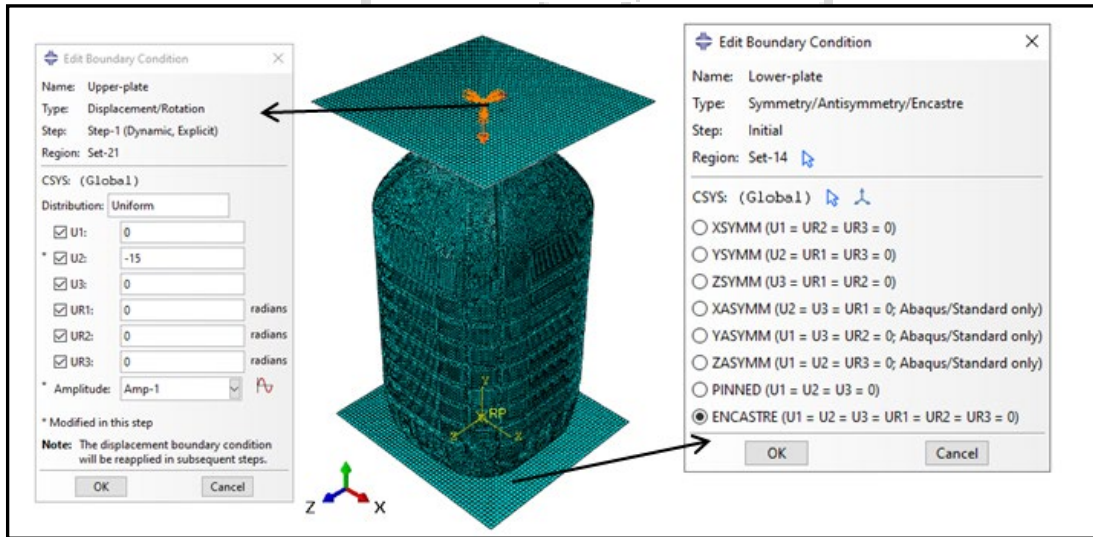
5. نموذج العينة وتطبيق الأحمال:

باستخدام برنامج سوليدوروكس، تم إنشاء نموذج ثلاثي الأبعاد لقنينة المياه عبوة 7 لتر كما هو موضح بالشكل رقم (1) كمثال للشكل المربع وآخر دائري الشكل لكي يقارن بين التصميمين من ناحية الصمود للقوى الخارجية وعدم الفشل في أداء الوظيفة المناطة به وكيفية توزيع شدة الإجهادات على سطح العبوة. تم إدخال الخواص المذكورة في الفقرة 3 للتعبير عن سلوك المادة البلاستيكية أثناء تسليط الحمل الخارجي. يعتبر التشبيك (mesh) مهماً جداً لتحليل الجسم أو الكائن الهيكلي، حيث أن التشبيك هو طريقة لوصف الجسم بأجزاء أصغر (elements) لدقة النتائج وتعرف مجموعة العقد (nodes) والعناصر بالشبكة. تم استخدام خاصية التشبيك اليدوي المزود بها برنامج Abaqus وتقسيم جسم القنينة إلى 137122 عنصر مع تطبيق نوع التشبيك S3R بسبب تعقيد تصميم القنينة المزودة بكثير من الخطوط ومنحنيات لتقوية جسم العبوة كما موضح بالشكل رقم (2)، حيث يستغرق هذا النوع من العناصر وقت أكثر للتحليل مع دقة النتيجة.

تم تطبيق شروط الحدود مثل القيود والإزاحة على النموذج الذي يعكس الوضع الفعلي الذي تعمل فيه العبوة. إزاحة سفلية بقيمة 15 ملم ($U_2 = -15$) كحد أقصى في إتجاه محور Y للوح العلوي بينما يكون مقيد من الحركة والدوران في الإتجاهات الأخرى ($U_1 = U_2 = U_3 = U_R1 = U_R2 = U_R3 = 0$)، أما اللوح السفلي فهو مثبت في جميع الإتجاهات ($U_1 = U_2 = U_3 = U_R1 = U_R2 = U_R3 = 0$) كما هو موضح بالشكل رقم (3).



شكل (2). نوع التشبيك المطبق على نموذج العينة



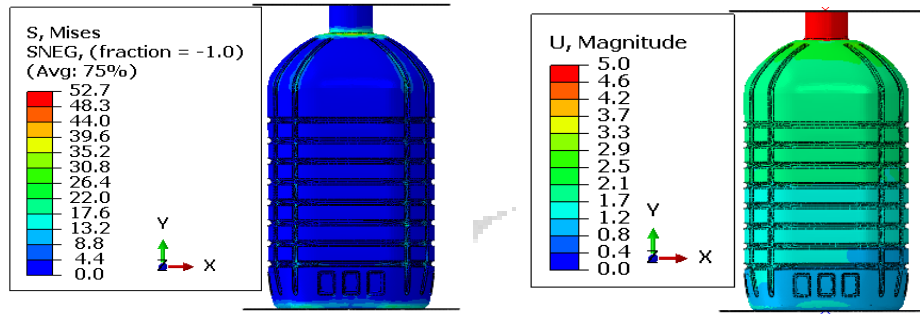
شكل (3). تنفيذ الخطوات الأولية لتقييد القنينة وتطبيق الإزاحة.

أخيراً، تم تكوين الملف الخاص بالعينة (job) وتسليمه للبرنامج للتحليل الديناميكي الغير خطي (An explicit dynamic non-linear computation) للحصول على نتائج توزيع شدة الإجهاد (von Mises) على هيكل القنينة وسلوكها تحت تأثير الأزرحة السفلية.

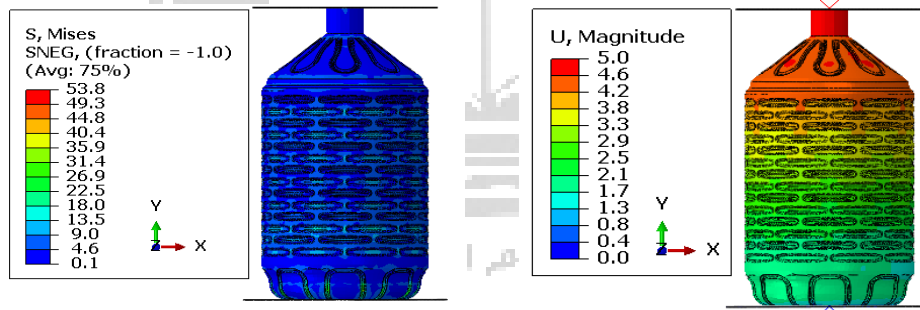
6. النتائج والمناقشة:

أجريت محاكاة نموذج قنينة المياه ذات عبوة 7 لتر باستخدام المعلومات والمواد والشروط المحددة والمذكورة أعلاه. حيث تم تطبيق الإزاحة السفلية بمقدار 15 ملم للوح العلوي كأقصى قيمة للتحميل على نموذج القنينة، حيث يستخدم إختبار الحمل العلوي لمعرفة الحمل الذي تستطيع القنينة تحمله قبل عملية الفشل وخاصة أثناء عمليات التخزين أو النقل، وعليه يمكن تقييد عمليات التلف التي تلحق بالقنينات وذلك بالرص المناسب اعتماداً على نتائج إختبار الحمل العلوي. أستخدم الشكل المربع والدائري لنموذج القنينة بكتلة قدرها 70 جرام أي

وزن المصعب الذي أستخدم لتشكيل القنينة. من خلال النتائج التي تم الحصول عليها لوحظ تغير في سلوك القنينة لمقاومة الحمل العلوي بتغير شكل القنينة وذلك بمقارنة نتائج الإجهادات (ميجا باسكال)، شكل النموذج (إنبعاج او إنغماس) ومقدار قوة تحمل القنينة للحمل المسط (نيوتن) عند 3 مراحل من التحميل العلوي بمسافة 5، 10 و15ملم في إتجاه γ - كما هو مفصل فيما يلي:-
1-6 التحميل لمسافة 5ملم :- يظهر في الشكل (4-أ) و (4-ب) توزيع الإجهاد Von-Mises على نموذجي القنينة المربع والدائري بعد التعرض لإزاحة سفلية بقيمة 5ملم، حيث لا يوجد فرق يذكر بين أكبر قيمة للإجهادات الناتجة عن التحميل. من ناحية أخرى شكل القنينة المربع بدأ في الفشل عند الخط الفاصل بين الرقبة والكتف ونتيجة لتولد أكبر قيمة للإجهاد عند هذا الفاصل بسبب التغير المفاجئ في الأبعاد.

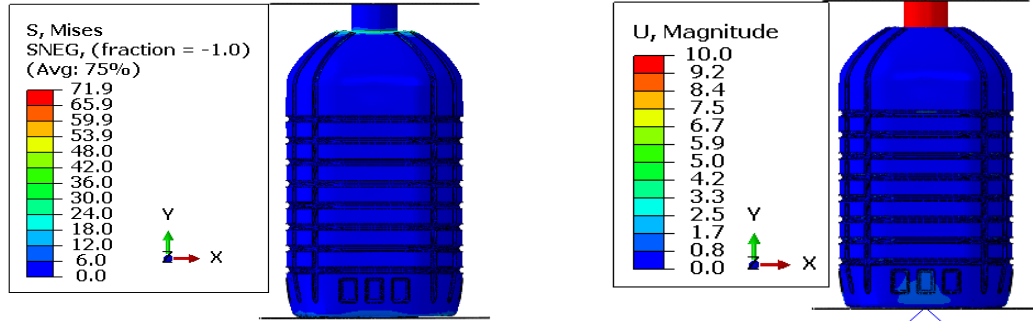


شكل (4-أ). إزاحة سفلية بمقدار 5ملم وقيمة الإجهادات للنموذج المربع

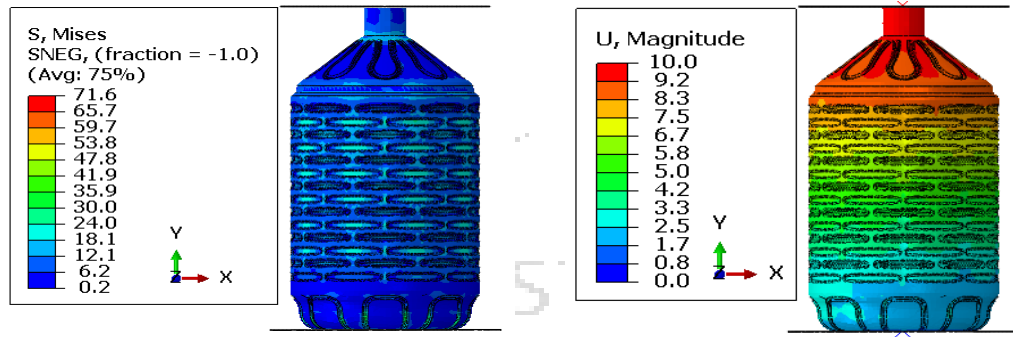


شكل (4-ب). إزاحة سفلية بمقدار 5ملم - قيمة الإجهادات للنموذج الدائري

في حالة النموذج الدائري، لا توجد أي علامات على فشل القنينة لعدم تركيز الإجهادات في منطقة معينة وبالتالي تكون سبب إنهاء القنينة كما حدث في النموذج المربع، وإنما توزعت الإجهادات على هيكل القنينة وخاصة الأخاديد الموجوده على منطقة الجسم.
2-6 في حالة زيادة الإزاحة السفلية لمسافة 10ملم كما هو موضح بالشكل (5-أ) للنموذج المربع والشكل (5-ب) للنموذج الدائري، فإن قيمة الإجهادات لاتزال متقاربة جدا ولكن إنغماس الرقبة يزداد في منطقة الكتف بالنسبة للنموذج المربع بينما يزال النموذج الدائري يقاوم قوة التحميل ولا توجد علامات لتركز الإجهادات في المنطقة الفاصلة بين الرقبة والكتف والتي تعتبر أضعف نقطة للتغير الكبير في الأبعاد.

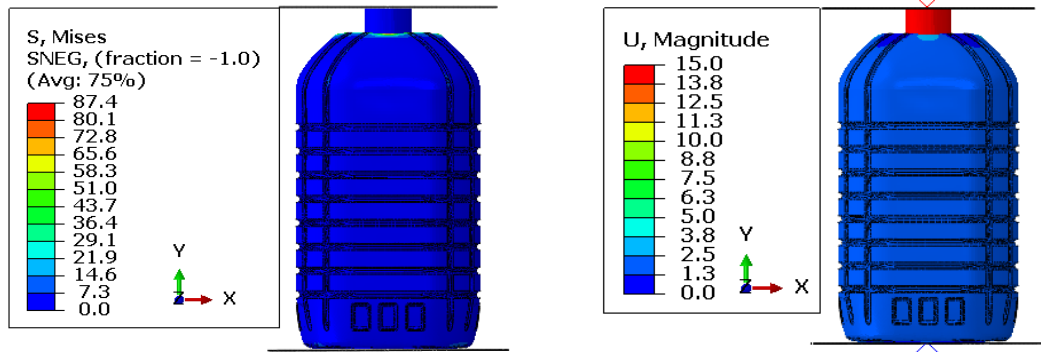


شكل (5-أ). إزاحة سفلية بمقدار 10ملم - قيمة الإجهادات

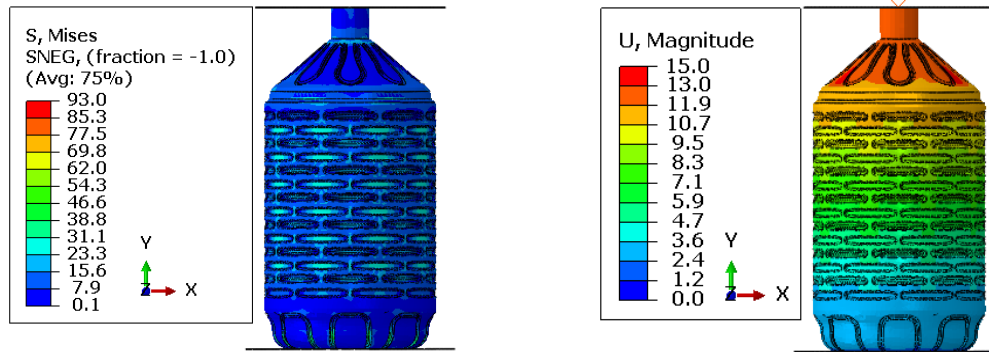


شكل (5-ب). إزاحة سفلية بمقدار 10ملم - قيمة الإجهادات

3-6 في الخطوة الأخير تم زيادة الإزاحة السفلية الى 15ملم كما هو في الشكل (6-أ) للنموذج المربع والشكل (6-ب) للنموذج الدائري. رغم وصول قيمة الإجهادات على النموذج الدائري أعلى من قيمة إجهاد الخضوع لمادة الـ PET (75.49 ميجا باسكال) إلا أن القنينة الدائرية لازالت تقاوم الحمل، بينما القنينة المربعة الشكل حدث لها إنهيار لعدم تحمل القوة العمودية المسلطة عليها عند المرحلة الثانية من التحميل (10ملم).

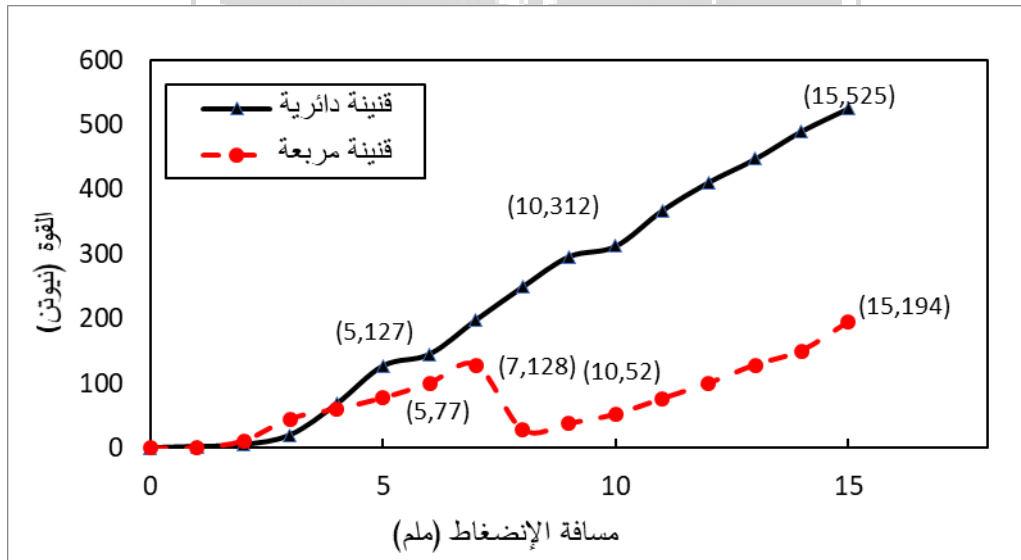


شكل (6-أ). إزاحة سفلية بمقدار 15ملم - قيمة الإجهادات



شكل (6-ب) إزاحة سفلية بمقدار 15 ملم - قيمة الإجهادات

الشكل (7) يوضح العلاقة بين مسافة الإنضغاط ورد فعل القنينة لكل من النموذجين. نلاحظ أن المنحنى المتقطع والذي يمثل سلوك نموذج القنينة مربعة الشكل به نقطة حدث عندها انخفاض مفاجئ في الحمل والتي تقع بعد مسافة تحميل 7 ملم و 128 نيوتن كقيمة رد فعل القنينة وهو يمثل سعة التحميل العلوية للقنينة المربعة الشكل بدون فشل، يدل هذا السلوك على حدوث إنهيار لهيكل القنينة أمام الحمل المسط بعد إنغماس رقبة القنينة في جسمها والذي سبب الإنهيار المفاجئ في قيمة رد فعل القنينة للحمل. بعد إستقرار القنينة جزئيا بعد الفشل الأولي بدأت بعدها القوة تزداد تدريجيا الي أن وصلت 194 نيوتن عند مسافة تحميل 15 ملم والتي كانت نهاية مسافة التحميل في هذه الدراسة.



شكل (7). مسافة الإنضغاط مقابل قوة تحمل القنينة

أما سلوك نموذج القنينة دائرية الشكل تحت تأثير الحمل العلوي والتي يمثلها المنحنى المستمر في الشكل (7) يدل على تزايد قوة رد فعل النموذج الدائري مع تزايد مسافة التحميل بدون حدوث إنهيار حتى نهاية مسافة التحميل 15 ملم، وهذا يعطينا مؤشر على مقاومة

النموذج الدائري لظروف التحميل بدون فشل والتي هي نفسها طبقت على النموذج المربع وحدث به فشل. الجدول رقم (3) يوضح المقارنة في أداء النموذج المربع والدائري للقنينة البلاستيكية المصنعة من مادة الـ PET وذلك بسرد قيم الإزاحة وما يقابلها من قيمة قوة رد فعل القنينة.

جدول (3). الإزاحة العمودية مقابل القوة

شكل القنينة	الإزاحة العمودية (مم)	أقصى قيمة للقوة (نيوتن)
مربع	5	77
دائري	5	127
مربع	10	52
دائري	10	312
مربع	15	194
دائري	15	525

7. الخلاصة:

تمت إجراء هذه الدراسة على نموذجين دائري ومربع الشكل لقنينة بسعة 7 لتر والمصنعة من مادة البولي إيثيلين تريفثالات (PET) والتي تستخدم لتعبئة مياه الشرب في السوق المحلي بكثرة، وذلك بإستخدام البرنامج الهندسي Abaqus لمحاكاة النموذجين المقترحين تحت تأثير حمل محوري لمقارنة أداء هيكل القنينة والخروج بتوصيات مبنية على نتائج علمية يتم على أساسها تفضيل تصميم على آخر بناءً على تحمل الضغط المحوري أثناء النقل والتكديس. حيث كانت نتائج التحليل العددي تدعم الخلاصة التالية:-

- القنينة ذات التصميم الجيد تقاوم الحمل العلوي أفضل من التصميم غير مناسب مع إستخدام نفس وزن الماده البلاستيكية المستخدمة في تشكيلها.
- يعتبر التغير الكبير في الأبعاد عند تصميم القنينة هو منطقة محفزة لتركز الإجهادات وبالتالي تكون فرصة فشل القنينة كبيره
- الشكل الدائري يعتبر أفضل من المربع في تصميم القنينات لتمثيل المسافات من المحور وبالتالي توزيع متساوي للقوة على جسم القنينة وتقليل فرص حدوث الفشل.

8. التوصيات:

- إستعمال معدات آلية لتعبئة القنينات البلاستيكية لما لها من مميزات كإضافة غاز النيتروجين أثناء التعبئة مما يزيد من مقاومة القنينة للأحمال الخارجية مع إمكانية إستخدام مواد أقل لتصنيع القنينة وبالتالي تتحمل ظروف النقل والتكديس وتقليل الضرر البيئي.
- إدراج البرامج الهندسية للتصميم والمحاكاة في النظام التعليمي الليبي لخلق فرص عمل مهارية للخريجين في الشركات العامة والخاصة وإستخدام هذه البرامج في محاكاة مراحل ما قبل التصنيع للحصول على منتج ذو جودة عالية وسعر تكلفة منافس.
- دراسة ومحاكاة عملية تشكيل القنينات البلاستيكية المصنعة من مادة الـ PET لمعرفة تأثير متغيرات العملية على جودة المنتج النهائي.

المراجع

- [1] Hanlon, J.F. and R.J. Kelsey, Handbook of package engineering. 1998: Crc Press.
- [2] Karalekas, D., Rapti, D., Papakaliatakis, G. and Tsartolia, E., 2001. Numerical and experimental investigation of the deformational behaviour of plastic containers. Packaging Technology and Science: An International Journal, 14(5), pp.185–191.
- [3] Suvanjumrat, C., Puttapitukporn, T. and Thusneyapan, S., 2008. Analysis of fluid–structure interaction effects of liquid–filled container under drop testing. Agriculture and Natural Resources, 42(1), pp.165–176.
- [4] Hu, Q.C., Sha, W.J., Li, Y.H. and Wang, Y.S., 2012. Structural optimization and lightweight design of PET bottle based on ABAQUS. In Advanced Materials Research (Vol. 346, pp. 558–563). Trans Tech Publications Ltd.
- [5] C.A.S.D. Miranda, J.J.D. Câmara, O.P. Monkema, C. Gouvêa, and D. Santos, Design optimization and weight reduction of 500 mL CSD PET bottle through FEM simulations, Journal of Materials Science and Engineering, B1(2011) 947–959.
- [6] Kandachar PV. Design and development of plastic containers. REPLASTICO Workshop, Brussels, 23 February 1996.
- [7] Reed, P.E., Breedveld, G. and Lim, B.C., 2000. Simulation of the drop impact test for moulded thermoplastic containers. International journal of impact engineering, 24(2), pp.133–153.
- [8] تقييم عبوة بلاستيك (PET) سعة 7 لترات من خلال نمذجة العناصر المحدودة. The international journal of engineering and information technology (IJEIT) ع.ص: 30-32 ، الرقم المرجعي للورقة : ع.ه. 24 (ISSN 2410-4256) علي محمد الغويل
- [9] Harshath, C., Chandan, R., Shashikantha, N. and Venkatesha, R., 2018. Buckling Evaluation of a Plastic Bottle Design. Int. Res. J. Eng. Technol, 5(10), pp.549–553.
- [10] Rohit Vaidya, 2012. Structural analysis of poly ethylene terephthalate bottles using the finite element method. Oklahoma State University. ISBN 1267427205