

الحل العددي لمسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية العادية باستخدام طريقة الفروق المنتهية

The Numerical Solution of Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations Using the Technique of Finite Difference

جودة ابو القاسم النقا
كلية التقنية الهندسية جنزور
judaalteggaz@gmail.com

Received 30 November 2023; revised 13 December 2023; accepted 15 December 2023

الملخص

تتناول هذه الورقة، تقديم أحد الطرق العددية التي تستخدم بشكل شائع في إيجاد الحل التقريبي لمسائل القيم الحدية ذات الابعاد المنتظمة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية من الدرجة الثانية وتعرف بطريقة الفروق المحددة او المنتهية. تم إيجاد الحل العددي لمثل هذه المسائل وجدولة النتائج ومقارنتها مع الحل التحليلي. كما تم عرض الاشكال البيانية وذلك من اجل دعم النتائج العددية. تعتبر هذه الطريقة من الطرق الغير معقدة ونتائجها تتقارب بشكل كبير مع الحل الصحيح.

الكلمات الرئيسية: مسائل القيم الحدية، طريقة الفروق المنتهية، المعادلات التفاضلية الاعتيادية

1. المقدمة:

تظهر أهمية المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية عند نمذجة الظواهر الفيزيائية؛ وبذلك يكون استخدامها لا غنى عنه في العديد من المجالات. فعند تطبيق المعادلات التفاضلية الاعتيادية أو الجزئية، قد يكون الباحث مهتمًا بإيجاد حل لمعادلة تفاضلية تلي شروطًا معرفة او معطاة ومحددة بشكل معين. فإذا تم اعطاء الشروط عند بداية الفترة فقط لنقطة المتغير المستقل، عليه تكون المسألة ذات شروط أولية او ابتدائية؛ اما لو كانت الشروط معطاة عند البداية والنهاية لنقاط المتغير المستقل، فإنها تسمى شروط حدية. تعتبر مسائل القيم الحدية للمعادلات الخطية من الدرجة الثانية ذات أهمية خاصة وذلك بسبب استخدامها في العديد من التطبيقات مثل العلوم الهندسية وغيرها. في هذه الورقة كما هو الحال في معظم التطبيقات الفيزيائية، يتم دائمًا فرض شروط حدية عند نقاط البداية والنهاية للفترة المطلوب إيجاد الحل لها [1] ، [2] ، [3] .

في هذا العمل سوف نتناول مسألة القيمة الحدية من الدرجة الثانية:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

بحيث تخضع المعادلة (1) لشروط حدية على النحو التالي:

$$y(a) = \beta, \quad \text{and} \quad y(b) = \alpha \quad (2)$$

الفكرة المبنية عليها طريقة الفروق المنتهية هو استبدال جميع المشتقات التي تتضمنها مسائل القيم الحدية بالفروق المنتهية سواء كانت هذه الفروق امامية او خلفية او مركزية؛ وهذا ينطبق على أي مسألة في المعادلات التفاضلية وبذلك نتحصل على مجموعة من المعادلات الخطية التي يتم ايجاد الحل لها باحد الطرق المعروفة مثل تكرار جاكوبي لمنظومة المعادلات الخطية [1] ، [2].

قام بعض الباحثين بدراسة وحل مسائل القيم الحدية من الدرجة الثانية عدديا باستخدام طرق مختلفة وبشروط حدية مختلفة، على سبيل المثال، طريقة التجميع collocation method [4] وطريقة الرمي او التصويب shooting method [5]، وطريقة الغير متعددات الحدود السبلاين non-polynomial spline [6] كما هو موضح بالمراجع التي تمت الاشارة اليها. وبذلك فإن الغرض من هذا العمل هو تطوير طريقة عددية لحل مسألة القيمة الحدية من الدرجة الثانية المشار اليها بالمعادلة (1)

2. وصف الطريقة

بهذا العمل سوف نتناول حالة تعبر عن مسألة قيمة حدية خطية (Linear two point value problem) على النحو التالي:

$$L[y] \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x) \quad (3)$$

$$y(a) = \beta = y_a \quad \text{and} \quad y(b) = \alpha = y_b \quad \text{بحيث}$$

المعطيات (β أو y_a) وكذلك (α أو y_b) عبارة عن قيم معطاة تعبر عن الشروط الحدية عند نقطة البداية a ونقطة النهاية b على التوالي. بفرض أن $p(x) \geq 0$ و $q(x) \geq 0$ ولغرض تطوير الطريقة العددية لإيجاد حل المعادلة التفاضلية (3)، يتم تقسيم الفترة $[a, b]$ إلى فترات مصغرة تعرف بعقد نقطية او نقاط شبكية ذات ابعاد متساوية عن بعض أي بطول خطوة تسمى h [1] ، [7].

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad x_0 = a, \quad x_n = b \quad h = (b - a) / n \quad \text{بحيث}$$

فإذا ما تم اعتبار وجود حالة خاصة وهي عندما تكون قيمة $p(x)$ ثابتة، وبتطبيق امتداد سلسلة تايلور عند $y(x-h)$ و $y(x+h)$ على التوالي يليه عملية جمع الطرفين، يمكن الحصول على فروق مركزية من الدرجة الثانية [8,1].

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = y''(x) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x-h, x+h] \quad (4)$$

باستخدام المعادلة (4) عند النقطة $x = x_i$ والتعويض بها في المعادلة التفاضلية (3)، نتحصل على:

$$0 = -py''(x_i) + q(x_i)y(x_i) - f(x_i)$$

$$Ly(x_i) \equiv 0 = -p \frac{[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))]}{h^2} + q(x_i)y(x_i) - f(x_i) + p \left[\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi) \right] \quad (5)$$

وبتعريف قيمة الدالة التقريبية y_i عند النقطة x_i أي $y(x_i)$ وحذف حد الخطأ $O(h^2)$.

بحيث قيمة الدالة y_i تحقق:

$$L_h y_i \equiv p \frac{[-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}]}{h^2} + q(x_i)y_i = f(x_i) \quad (6)$$

عندما $i = 1, 2, \dots, n-1$

ويمكن إعادة صياغة المعادلة (6) بحيث تكون:

$$p \frac{[-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}]}{h^2} + q(x_i)y_i = f(x_i) \quad (7)$$

وحيث ان الشروط الحدية للمسألة معطاة، عليه تكون قيمة الدالة عند نقاط البداية و النهاية ($y_n = y_b = \alpha$, $y_0 = y_a = \beta$) وبذلك نتحصل على عدد $(n-1)$ من المعادلات الخطية مساوي لعدد المجاهيل (y_1, \dots, y_{n-1}) .

من المفيد تحديد خطأ الاقتران المحلي local truncation error للطريقة [1,7]، وذلك عن طريق المعادلات (5) و (6). وبحسب هذا الخطأ كالتالي:

$$\tau_i = L_h(x_i) - Ly(x_i)$$

أساساً هذا يبين كيفية ان الحل الحقيقي يتوافق مع الحل المتحصل عليه من استخدام مثل هذه المعادلات عند النقاط المعطاة الغير متصلة. وبالرجوع لاستخدام امتداد سلسلة تايلور [1]، نجد:

$$\tau_i = L_h(x_i) - Ly(x_i) = -p \left[\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi) \right]$$

في الخطوات اللاحقة نتناول هذه الورقة طريقة الفروق المنتهية بشكل أكثر تفصيلاً. بحيث يتم ضرب المعادلة (7) في h^2 وتجمع حدود المعادلة بشكل ترتيبى على النحو:

$$-py_{i+1} + [2p + h^2q(x_i)]y_i - py_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

فاذا ما تم وضع $a_i = 2p + h^2q(x_i)$ عليه من الممكن التعبير عن مجموعة المعادلات الخطية بمصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -p & a_2 & -p & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -p & a_{n-2} & -P \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -p & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} py_a \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ py_b \end{bmatrix} \quad (8)$$

وبالتالي، عند ترتيب مجموعة المعادلات الخطية بالمصفوفة (8)، فإن المطلوب إيجاد حل للنظام الخطي $Ay=F$ بحيث A عبارة عن مصفوفة ممتازة وثلاثية القطر، و y تعبر عن المجاهيل، و F عبارة عن الطرف الايمن للمعادلة وقيمه محسوبة ومعروفة. عليه فإنه يمكن اختيار طريقة عددية لإيجاد الحل مثل تكرار جاكوبي لمنظومة المعادلات الخطية والذي بدوره يؤول الى التقارب [1].

في حالة ما تكون p تعتمد على المتغير x فإنه من الممكن صياغة ما يلي:

$$Ly = -py'' - p'y' + qy \quad (9)$$

بحيث عند تقريب الحد الاول في حالة $x=x_i$ نحصل على:

$$p(x_i) \frac{[-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}]}{h^2}$$

للحصول على تقريب المشتقة الاولى، نستخدم سلسلة تايلور:

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x) + \frac{h^3}{6} y'''(\eta)$$

مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

بحيث: $\eta \in [x-h, x+h]$

وبذلك يمكن إعادة صياغة المعادلة (9) كالتالي:

$$-\left[p(x_i) - \frac{hp'(x_i)}{2} \right] y_{i-1} + [2p(x_i) + h^2 q(x_i)] y_i - \left[p(x_i) + \frac{hp'(x_i)}{2} \right] y_{i+1} = h^2 f(x_i)$$

هذا النهج يوجد به قصور يتمثل: أولاً- المصفوفة التي نحصل عليها لن تكون ممتازة، الامر الذي يتطلب المزيد من الجهد لإيجاد الحل لهذه المنظومة، ولمعرفة ذلك، دع:

$$a_i = 2p(x_i) + h^2 q(x_i), \quad b_i = p(x_i) - \frac{hp'(x_i)}{2}, \quad c_i = p(x_i) + \frac{hp'(x_i)}{2}$$

عليه يمكننا التعبير عن منظومة المعادلات الخطية على شكل مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -b_{n-2} & a_{n-2} & -c_{n-2} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 y_a \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ c_{n-1} y_b \end{bmatrix}$$

عندما لا تكون p ثابتة بمعنى متغيرة، عليه لا يمكن توقع بأن $b_{i+1} = c_i$. القصور الاخر يتمثل في حساب p' .

بدلا من ذلك ولتجنب القصور المذكور اعلاه، ننهج طريقة اخرى لتقريب المشتقات بالمعادلات وذلك باستخدام امتداد سلسلة تايلور [1]، وعليه نحصل على:

$$v(x \pm \varepsilon) = v(x) \pm \varepsilon v'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} v''(x) \pm O(\varepsilon^3)$$

أو

$$v(x \pm \varepsilon) = v(x) \pm \varepsilon v'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} v''(x) \pm \frac{\varepsilon^3}{6} v'''(x) + O(\varepsilon^4)$$

وهذا يعتمد عند أي حد يتم عنده إتخاذ القرار بأن يقف هذا الامتداد. لذلك

$$v(x + \varepsilon) - v(x - \varepsilon) / (2\varepsilon) = v'(x) + O(\varepsilon^2)$$

أو

$$v(x + \varepsilon) - v(x - \varepsilon) / (2\varepsilon) = v'(x) + \frac{\varepsilon^2}{6} v'''(x) + O(\varepsilon^3)$$

مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

بداية إذا تم إختيار $v = py'$ و $x = x_i$ و $\varepsilon = h/2$ وبذلك يتم الحصول على:

$$(py')'(x_i) = \frac{\left[(py')\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - (py')\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \right]}{h} + O(h^2)$$

ثم يتم اختيار $v = y$ و $\varepsilon = h/2$ و $x = x_i + h/2$ و $x = x_i - h/2$ نتحصل على:

$$y'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} - \frac{h^2}{24} y'''\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + O(h^3)$$

$$y'\left(x_i - \frac{h}{2}\right) = \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} - \frac{h^2}{24} y'''\left(x_i - \frac{h}{2}\right) + O(h^3)$$

وعند التعويض بهذه المقادير يتم الحصول على:

$$(py')'(x_i) = \frac{1}{h} \left[p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} \right] + \frac{h}{24} \left[p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) y'''(x_i + \frac{h}{2}) - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) y'''(x_i - \frac{h}{2}) \right] + O(h^2)$$

نجد أن الحدود التي داخل الأقواس الكبيرة اعلاه تبدو فقط دالة في $O(h)$ ، والتي من الممكن الحصول عليها من خلال تطبيق طريقة ايجاد القيمة المتوسطة، أي أن:

$$p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) y'''(x_i + \frac{h}{2}) - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) y'''(x_i - \frac{h}{2}) = O(h)$$

وبذلك

$$(py')'(x_i) = \frac{1}{h} \left[p\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} - p\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} \right] + O(h^2)$$

وبالإشارة الى ان $p(x_i \pm h/2)$ يستدل عنها بواسطة $p_{i \pm 1/2}$ ، وحذف الحد $O(h^2)$ ، نصل إلى التقريب:

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} \left(-p_{i-\frac{1}{2}} y_i + \left[p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q(x_i) \right] y_i - p_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} \right)$$

وبذلك معادلة الفروق تصبح:

$$-p_{i-\frac{1}{2}} y_{i-1} + \left[p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q(x_i) \right] y_i - p_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} = h^2 f(x_i)$$

وإذا ما تم التعويض عن $a_i = p_{i-1/2} + p_{i+1/2} + h^2 q(x_i)$ ، فإننا نتحصل على المنظومة الخطية التالية:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -p_{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -p_{\frac{3}{2}} & a_2 & -p_{\frac{5}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -p & a_{n-2} & -p_{n-\frac{3}{2}} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -p_{n-\frac{3}{2}} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 y_a \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ p_{n-\frac{1}{2}} y_b \end{bmatrix}$$

لغرض التحقق من إمكانية تطبيق هذه الطريقة، تم تناول نموذج المسائل التالية والتي يصحبها الحل الصحيح. وقد تم احتساب قيمة الخطأ عند كل نقطة معطاة يتضمنها نطاق المسألة باستخدام الصيغة $|e_i| = |y(x_i) - y_i|$ لكل النقاط $(i = 0, 1, \dots, n)$

بحيث $y(x_i)$ و y_i يمثلان الحلين الصحيح والتقريبي للمسألة المعطاة على التوالي عند النقاط المعطاة.

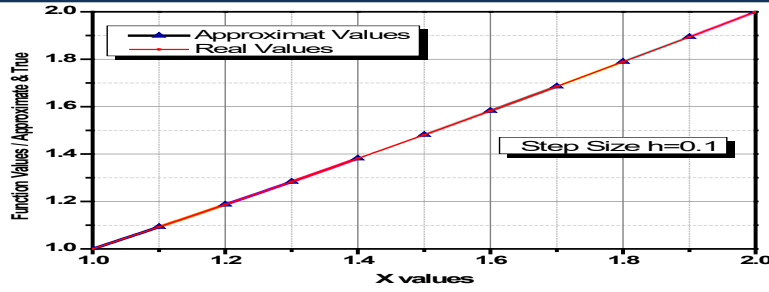
نموذج المسألة الاولى: مسألة قيم حدية $y'' = (-2/x)y' + (2/x^2)y + \sin(\ln(x))/x^2$ تخضع لشروط حدية كالتالي:
 $y(1)=1, y(2)=2$. بحيث الحل الصحيح لهذه المسألة:

$$y(x) = \frac{1}{70x^2} (69x^3 + 12x^3 \sin(\ln(2)) + 4x^3 \cos(\ln(2)) - 21x^2 \sin(\ln(x)) - 7x^2 \cos(\ln(x)) + 8 - 12 \sin(\ln(2)) - 4 \cos(\ln(2)))$$

يبين الجدول رقم 1 الحل العددي باستخدام الطريقة محل الدراسة في هذه الورقة مقارنة مع الحل الصحيح. كما تم توضيح ذلك عن طريق الشكل رقم 1.

الجدول رقم 1 الحل العددي مقارنة بالحل الصحيح

طول الخطوة h	x_i	القيم المحسوبة التقريبية	القيم الصحيحة	الخطأ
0.1	1.1	1.09260052	1.092629298	0.000028778
	1.2	1.18704313	1.18708484	0.000041710
	1.3	1.28333687	1.283382364	0.000045494
	1.4	1.38140205	1.381445952	0.000043902
	1.5	1.48112026	1.481159417	0.000039157
	1.6	1.5823599	1.582392461	0.000032561
	1.7	1.68498902	1.685013962	0.000024942
	1.8	1.78888175	1.788898535	0.000016785
	1.9	1.8939211	1.893929509	0.000008409
0.125	1.125	1.11601746	1.119316955	0.003299495
	1.250	1.23493749	1.24102293	0.006085440
	1.375	1.35670088	1.364580331	0.007879451
	1.500	1.48109842	1.489614889	0.008516469
	1.625	1.60787481	1.615855233	0.007980423
	1.750	1.73677329	1.743098131	0.006324841
	1.875	1.86755392	1.871187319	0.003633399



الشكل رقم 1. الحل الصحيح مقارنة بالحل العددي

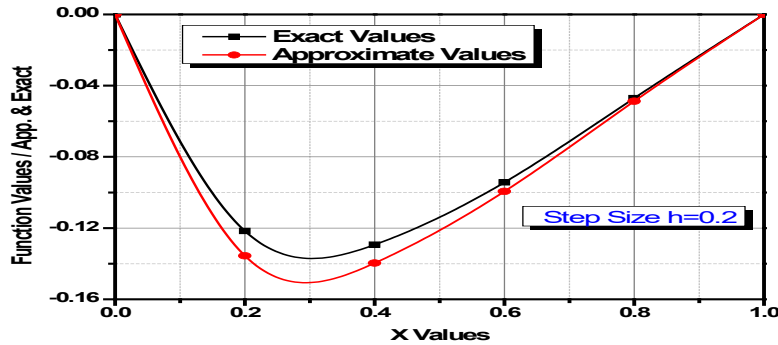
نموذج المسألة الثانية: ايضا سوف نتناول مسألة قيم حدية على النحو $y'' = -5y' - 4y + 1$ تخضع لشروط حدية $y(0)=0, y(1)=0$. بحيث الحل الصحيح لهذه المسألة:

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-4x} + 0.25, \quad A = \frac{e^{-3} - e}{4(1 - e^{-3})}, \quad B = -0.25 - A$$

بحيث يظهر الجدول رقم 2 الحل العددي التقريبي باستخدام طريقة الفروق المنتهية مقارنة مع الحل الصحيح. كما تم بيان ذلك عن طريق الشكل رقم 2.

الجدول رقم 2 الحل العددي التقريبي مقارنة بالحل الصحيح وقيمة الخطأ

طول الخطوة h	x_i	القيم المحسوبة التقريبية	القيم الصحيحة	الخطأ
0.2	0.0	0	0	0
	0.2	-0.135577662	-0.121681147	0.013896515
	0.4	-0.139641933	-0.12934403	0.010297902
	0.6	-0.099434883	-0.094297031	0.005137852
	0.8	-0.048759479	-0.047036326	0.001723153
	1.0	0	0	0
0.25	0	0	0	0
	0.25	-0.153753027	-0.130468735	0.023284291
	0.5	-0.127118644	-0.114649776	0.012468868
	0.75	-0.062953995	-0.059130569	0.003823426
	1	0	0	0

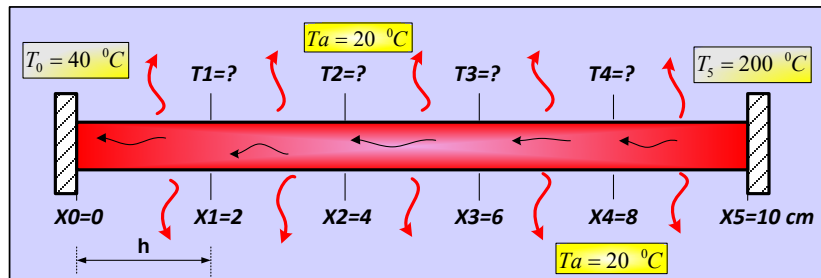


الشكل رقم 2 الحل العددي التقريبي مقارنة بالحل الصحيح

التطبيق: طريقة الفروق المنتهية Finite Difference لها تطبيقات عديدة وفي مجالات مختلفة سواء كان ذلك في مجال العلوم الهندسية ويشمل على سبيل المثال لا الحصر، الهندسة الكهربائية و الميكانيكية و المدنية وكذلك لها تطبيقات اخري التي يتم فيها نمذجة بعض المسائل الفيزيائية وذلك بالتعبير عنها بمعادلات تفاضلية يتطلب إيجاد الحلول لها عن طريق اللجوء الى استخدام بعض الطرق العددية والتي من بينها طريقة الفروق المنتهية.

مثال تطبيقي في مجال الهندسة الميكانيكية، من جانب انتقال الحرارة **Heat Transfer**:

الشكل رقم 3 يبين مسألة انتقال الحرارة في بعد واحد لحالة مستقرة على طول قطعة معدنية على شكل قضيب معدني ذات طول محدد. بحيث يتم الحفاظ على درجة حرارة ثابتة عند نهايات القطعة المعدنية. وتتدفق الحرارة عبر القطعة المعدنية عن طريق عملية التوصيل الحراري heat conduction وكذلك تتبادل القطعة المعدنية الحرارة مع الهواء المحيط عن طريق الحمل الحراري heat convection. وبطبيعة الحال فانه نتيجة للتوازن الحراري الذي يحدث، يمكن نمذجة ذلك بمسألة القيمة الحدية التالية من الدرجة الثانية للمعادلة التفاضلية الاعتيادية.



الشكل رقم 3 انتقال الحرارة على طول قطعة معدنية

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \alpha'(T_a - T) = 0 \quad (10)$$

بحيث T درجة حرارة القطعة المعدنية ($^{\circ}C$) و $\alpha' = \hbar P/kA$ (m^{-2}) بحيث \hbar عبارة عن معامل انتقال الحرارة ($W/(m^2 \cdot K)$) و P عبارة عن محيط القطعة المعدنية (m)، و k عبارة عن معامل التوصيل الحراري ($W/(m \cdot K)$) و A عبارة عن مساحة السطح للقطعة المعدنية (m^2). المطلوب إيجاد قيم درجات الحرارة المجهولة عند النقاط المعطاة للمتغير x على طول القطعة المعدنية.

الحل: يتم تحويل المعادلة (10) الى مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية من خلال احداث سلسلة من العقد النقطية على طول القطعة المعدنية. مثلا يمكن تقسيم القطعة المعدنية الى ستة عقد نقطية ذات بعد متساوي، بحيث البعد بين عقدة والتي تليها (طول الخطوة) يساوي $h = 2cm$ كما هو موضح بالشكل 3.

تقريب الفروق المنتهية يعمل على تحويل المشتقات بالمعادلة التفاضلية الى نظام جبري. مثلا، المشتقة الثانية للمعادلة التفاضلية (10) عند كل عقدة نقطية يمكن تقريبها كالتالي:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}$$

بحيث T_i تشير الى درجة الحرارة عند النقطة العقدية i . هذا التقريب من الممكن التعويض عنه بالمعادلة (10) لنحصل على:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + \alpha'(T_a - T_i) = 0$$

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} + \alpha' h^2 T_a - \alpha' h^2 T_i = 0$$

$$-T_{i+1} + (2 + \alpha' h^2)T_i - T_{i-1} = +\alpha' h^2 T_a$$

بافتراض أن $\alpha' = 0.01$ ، وحيث أن $h = 2$ و $T_a = 20$ عليه:

$$-T_{i-1} + 2.04 T_i - T_{i+1} = 0.8 \quad (11)$$

وبذلك تم تحويل المعادلة التفاضلية (10) الى مجموعة من المعادلات الجبرية وذلك بتطبيق المعادلة (11) عند كل نقطة عقدية.

$$i = 1 \Rightarrow -T_0 + 2.04 T_1 - T_2 = 0.8$$

$$i = 2 \Rightarrow -T_1 + 2.04 T_2 - T_3 = 0.8$$

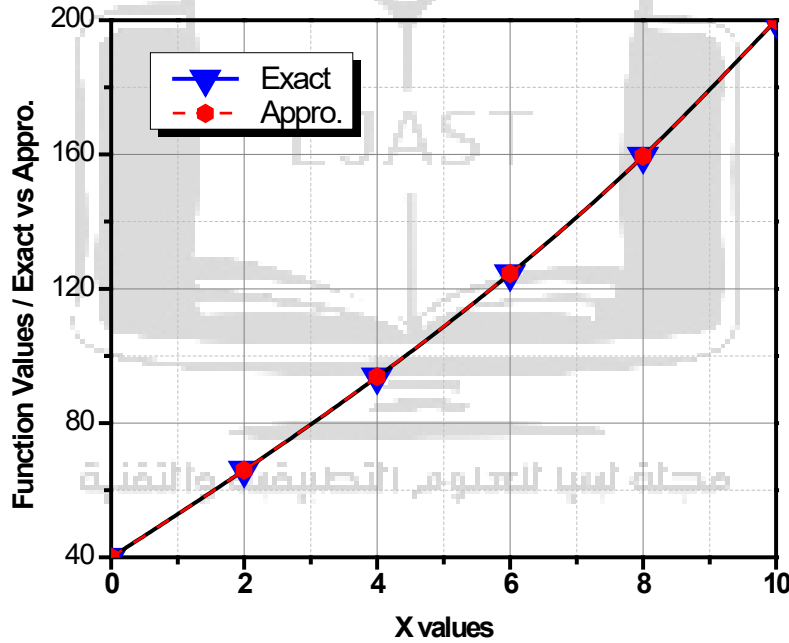
$$i = 3 \Rightarrow -T_2 + 2.04 T_3 - T_4 = 0.8$$

$$i = 4 \Rightarrow -T_3 + 2.04 T_4 - T_5 = 0.8$$

وبالتعويض عن قيم درجات الحرارة عند النهايات حسب ما هو موضح بالشكل 3. نتحصل على 4 معادلات تتضمن 4 مجاهيل يمكن صياغتها على هيئة مصفوفة كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

وباستخدام برنامج MATLAB تم إيجاد قيم المجاهيل (T_1, T_2, T_3, T_4) . والشكل رقم 4 يبين القيم التقريبية المتحصل عليها باستخدام الطريقة محل الدراسة مقارنة مع القيم الصحيحة للمسألة.



الشكل رقم 4 القيم التقريبية مقارنة مع القيم الصحيحة

Conclusion الخلاصة

تعتمد دقة طريقة الفروق المنتهية لمسائل القيم الحدية الخطية من الدرجة الثانية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية على حجم طول الخطوة h (step size) وكذلك على رتبة التقريب order of approximation. كلما قلنا من طول الخطوة h ، تتحسن الدقة ولكن في الوقت نفسه يزداد عدد المعادلات التي يستوجب إيجاد الحل لها.

عندما يتم تقسيم نطاق المسألة الى عدد كبير من التقسيمات الفرعية subintervals، في هذه الحالة نتحصل على عدد هائل من المعادلات الأتية المراد حلها، الامر الذي يتطلب زمنا مفرطاً لاجراء عملية الحسابات، وبذلك يصعب تحقيق الدقة بشكل جيد. وعند استخدام الرتب الأعلى لتقريب الفروق المنتهية فان ذلك يؤدي إلى دقة أفضل لنفس حجم طول الخطوة ولكن في الوقت نفسه ينتج عنه صعوبات معقدة نوعا ما خصوصا بالقرب من النقاط المعطاة عند نهاية الفترة حيث القيم الخارجية تكون غير معروفة [9].

لذا يُنصح بحل منظومة المعادلات الخطية لعدة قيم مختلفة من طول الخطوة h . وعند مقارنة الحلول عند نفس نقاط الشبكة يمكن الاشارة أو التعرف الى افضل دقة متحصل عليها.

المراجع References

- [1]. Chapra, S.C. and Canale, R.P. (2015) Numerical Methods for Engineers. Seventh Edition, McGraw-Hill, New York.
- [2]. Colletz L. (1996), "The Numerical Treatment of Differential Equations", 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, 241-260.
- [3]. Joe D. Hoffmen, "Numerical Methods for Engineers and Scientists", McGraw-Hill, New York, 1992.
- [4]. Bernard Bialecki (1991), "Sinc-Collection Methods for Two-Point Boundary Value Problems", IMA Journal of Numerical Analysis, Volume 11, Issue 3, Pages 357-375.
- [5]. Badradeen A., Mohsin H. A. Hashim (2014), "Shooting method in solving Boundary Value Problem", IJRRAS 21(1).
- [6]. Ikram A. T. (2006), Non-polynomial spline approach to the solution of a system of second-order boundary value problems, Applied Mathematics and computation 173(2), pp. 1208-1218.
- [7]. H.B. Keller, "Numerical Solution of Two-Point Boundary Value Problems", SIAM, Philadelphia, fourth printing, 1990.
- [8]. Lakshmi R., Muthuselvi M. (2013), "Numerical solutions for boundary value problem using finite difference method", IJRSET 2: 5305-5313.
- [9]. S. D. Conte, Carl de Boor, (1980), Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach, Third Edition, McGraw-Hill, New York.