LJAST
Libyan Journal of Applied Science andTechnology
مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

Volume 7.Issue2
December 2019

طرق ايجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة والمقارنة بينها

[1]الزناتي منصور ,[2]الغروس محمد ,[3]البوسيفي عبدالنبي ,[4]التميمي عادل

القسم العام – كلية التقنية الهندسية / جنزور

الملخص

– تعتبر طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا ذات اهمية كبيرة لما لها من دور بارز في حل هذا النوع من المعادلات في مختلف المجالات الهندسية سواء كانت ميكانيكية او كهربية او تحكم ألي واقتصرنا في هذا البحث على عمل مقارنة بين هذه الطرق وهي طريقة المعاملات غير المعينة وطريقة المؤثر التفاضلي وطرق تغاير البارامترات واستنتجنا ان طريقة تغاير البارامترات هي الافضل لأنها تمكنا من حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة مهما كان نوعها وايجاد الحل العام لها حتى ولو كانت معاملاتها دوال متغيرة وليست ثوابت بشرط ان تكون الدالة المكملة معلومة (y_c) وهو حل الجزء المتجانس ويكون ايجاد التكامل الخاص (y_p) بتغيير البارامترات أي استبدال الثوابت الاختيارية بدوال متغيرة بفرض معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.

الكلمات الدالة :

طرق حل المعادلات , طريقة تغير البارامترات , طريقة المعاملات غير المعينة , طريقة المؤثر التفاضلي .

1. المقدمة :

الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى او من الرتب العليا هي حلول يتم اشتقاقها من الحل العام عندما تعطى شروط ابتدائية او شروط حدية يمكن بها ايجاد الثوابت الاختيارية العشوائية التي تنتج من الحل العام . وفي حالة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية او اعلى فانه يتم ايجاد الحل الخاص بعدة طرق نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر طريقة المعاملات غير المعينة وطريقة تغير البارامترات وطريقة المؤثر التفاضلي $F(D)$ الا انه من الملاحظ في بعض هذه الطرق يتعذر ايجاد الحل الخاص وذلك مثل طريقة المعاملات غير المعينة والمؤثر التفاضلي التي يتعذر فيها ايجاد الحل الخاص عندما تكون الدالة التي بالطرف الايمن تحتوي على دوال معينة مثل $\tan x, \sec x, \cot x, \csc x, \ln x, \frac{1}{x}$ .... الخ وغيرها حيث يتم فيها اللجوء الى طريقة تغيير البارامترات التي تعتبر الافضل عند ايجاد الحل الخاص مهما كان نوع الدالة التي بالطرف الايمن .[3]

2. طرق ايجاد الحل الخاص (y_p) للمعادلات التفاضلية من الرتب العليا بمعاملات ثابتة والمقارنة بينها :[4]

الصورة العامة للمعادلات التفاضلية من الرتب العليا بمعاملات ثابتة هي:

$$a a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \text{ or } \quad F(D)y = Q(x)$$

3. المعادلات التفاضلية من الرتب العليا بمعاملات ثابتة تنقسم الى قسمين :[4] [8]

1- معادلات تفاضلية متجانسة .

2- معادلات تفاضلية غير متجانسة .

1.3 اولاً/ المعادلات التفاضلية المتجانسة :

اذا كان الطرف الايمن $Q(x)=0$ تسمى معادلة متجانسة و الصورة العامة لها هي :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{or} \quad F(D)y = 0$$

لإيجاد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة نتطرق الى الحالات الاتية : $y \neq 0$ $F(D)y = 0 F(D) = 0$

أ- اذا كانت قيم (D) حقيقية مختلفة مثل $D=a$, $D=b$, $D=k$

فان الحل هو $y_c = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} + c_3 e^{kx}$

فمثلا $(D^2+3D+2)y = 0$

فان المعادلة المساعدة

$$D^2+3D+2=0 \rightarrow (D+2)(D+1)=0 \rightarrow D_1=-1 \quad D_2=-2 \rightarrow y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

ب- اذا كانت قيم (D) حقيقية متشابهة مثل $D_1=a$, $D_2=a$, $D_3=a$

فان الحل هو : $y_c = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + c_3 x^2 e^{ax}$

فمثلا : $(D^2-4D+4)y=0$

$$\therefore D^2-4D+4=0 \rightarrow (D-2)(D-2)=0 \rightarrow D_1=2 \quad D_2=2 \rightarrow y_C = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

ج- اذا كانت قيم (D) تخيلية بحتة مثل : $D=\pm ai$ فان $y_c = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$

فمثلا $(D^2+4)y=0$; $y \neq 0$

$$\therefore D^2+4=0 \rightarrow D=\pm 2i$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

د- اذا كانت قيم (D) مركبة تتكون من شق حقيقي واخر تخيلي مثل $D=a\pm bi$ فان الحل هو :

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx]$$

فمثلا : $(D^2+4D+5)y=0$

$$D = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} D^2+4D+5=0 \rightarrow$$

$$\therefore D = \frac{-4\pm 2i}{2} \rightarrow D=-2\pm i$$

$$\therefore y_c = e^{-2x}[A\cos x + B\sin x]$$

2.3 ثانيا/ المعادلات التفاضلية غير المتجانسة :

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هي

$F(D)y = Q(x)a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots.+a_1 y' + a_0 y = Q(x)$ or

وللمعادلة التفاضلية غير المتجانسة حلان هما الحل المتجانس ويسمى الحل المكمل ويرمز له بالرمز (y_c) وحل اخر خاص يرمز له بالرمز (y_p) وبالتالي يكون الحل العام (y_G) مجموع الحلين

$$y_G = y_c + y_p$$

4. طرق إيجاد الحل الخاص (y_p) :

هناك العديد من الطرق نذكر منها طريقة المعاملات غير المعينة وتتكون هذه الطريقة بصورة رئيسية من تخمين ذكي لصيغة الحل الخاص ومن ثم تعويض هذه الدالة والتي ستحتوي بصورة عامة واحدا او اكثر من المعاملات غير المحدودة في المعادلة التفاضلية وحتى تكون هذه الطريقة ناجحة يجب ان يكون باستطاعتنا تحديد المعاملات غير المعلومة لكي تحقق الحل للمعادلة التفاضلية .[7]

1.4 اولا: طريقة المعاملات غير المعينة لإيجاد (y_p):

(أ) اذا كان $Q(x) = x^n$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة (n)

$$F(D)y = x^n$$

اذا كان $D_i \neq 0$ لكل i=1,2,….,k في (y_c) فان

$$y_p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots..+a_0$$

فمثلا المعادلة التفاضلية :

$(D^2 - 3D + 2)y = x^3$ فان

$$D^2 - 3D + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (D-1)(D-2) = 0 \longrightarrow D=1 \qquad D=2$$

$$\therefore D_i \neq 0 \quad then \quad y_p = Ax^3 + Bx^2 + Kx + C$$

(ب) اذا كان $Q(x) = x^n$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة (n)

$$F(D)y = x^n$$

و كان $D_i = 0$ لكل i=1,2,….,k في (y_c) فان

$$y_p = Ax^{n+k} + Bx^{n+k-1} + Cx^{n+k-2} + \cdots + ax^k$$

LJAST
Libyan Journal of Applied Science andTechnology
مجلة ليبيا للعلوم التطبيقية والتقنية

Volume 7.Issue2
December 2019

فمثلا $(D^3 - D^2)y = x^3 \quad \rightarrow \quad D^2(D-1) = 0$

$D_1 = 0$ ،$D_2 = 0$ ،$D_3 = 1$

فان $\quad y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + qx^2$

(ج) اذا كان $Q(x) = e^{ax}$ ، $F(D)y = e^{ax}$

1- اذا كان $D_i \neq a$ لكل i=1,2,….,k في (y_c) فان: $\quad y_p = Ae^{ax}$

فمثلا : $(D^2 + 3D - 10)y = e^{3x}$ فان

$D_1 = 2,\ D_2 = -5 \quad D^2 + 3D + 10 = 0 \rightarrow (D-2)(D+5) = 0 \longrightarrow \therefore D \neq 3 y_p = Ae^{3x}$

2- اذا كان $F(D)y = e^{ax}$ وكان $D_i = a$ لكل i=1,2,….,k فان $\quad y_p = Ax^k e^{ax}$

فمثلا : $(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}$ فان

$D^2 - 4D + 4 = 0 \rightarrow (D-2)(D-2) = 0 \quad \rightarrow \quad D_1 = 2 \quad D_2 = 2 \quad \rightarrow \quad y_p = Ax^2 e^{2x}$

(د) اذا كان $F(D)y = \sin ax \quad or \quad F(D)y = \cos ax \ Q(x) = \cos ax \quad or \quad Q(x) = \sin ax$

1- اذا كان $D \neq \pm ai$ فان $\quad y_p = A\cos ax + B\sin ax$

فمثلا : $(D^2 + 4)y = \cos 3x$

$D^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad D = \pm 2i$

$\therefore \ D \neq \pm 3i \quad \rightarrow \quad y_p = A\cos 3x + B\sin 3x$

2- اذا كان $D = \pm ai$ فان $\quad y_p = Ax\cos ax + Bx\sin ax$

فمثلا : $(D^2 + 9)y = \sin 3x$

$(D^2 + 9)y = 0 \quad \rightarrow \quad D^2 + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad D = \pm 3i$

$\therefore y_p = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$

(هـ) اذا كان $F(D)y = e^{ax}\cos bx \quad or \quad F(D)y = e^{ax}\sin bx \ Q(x) = e^{ax}\cos bx \quad or \quad Q(x) = e^{ax}\sin bx$

1- اذا كان $D \neq a \pm bi$ فان $\quad y_p = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx]$

فمثلا : $(D^2 + 4D + 5)y = e^{3x}\cos 2x$

$(D^2 + 4D + 5)y = 0 \quad \rightarrow \quad D^2 + 4D + 5 = 0$

$\therefore \ D = -2 \pm i \quad \because \ D \neq 3 \pm 2i \quad \rightarrow \quad y_p = e^{3x}[A\cos 2x + B\sin 2x]$

2- اذا كان $D = a \pm bi$ فان : $\quad y_p = e^{ax}[Ax\cos bx + Bx\sin bx]$

فمثلا : $(D^2 - 8D + 25)y = e^{4x}\cos 3x$

$$D^2 - 8D + 25 = 0 \quad \rightarrow \quad D = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(25)(1)}}{2}$$

$$\therefore D = 4 \pm 3i \quad \rightarrow \quad y_p = e^{4x}[Ax\cos 3x + Bx\sin 3x].$$ [10][2]

2.4 عيوب طريقة المعاملات غير المعينة :

1- نادرا ما تكون مفيدة اذا كانت المعادلة من ذوات المعاملات المتغيرة .

2- لا يمكن ايجاد (y_p) بها في حالة الطرف الايمن يكون

$$Q(x) = \tan ax \ \ or \ \ Q(x) = \cot ax \ \ or \ \ Q(x) = \sec ax \ \ or \ \ Q(x) = \csc ax \ \ or \ \ Q(x) = \ln x \ \ or \ \ Q(x) = \frac{1}{x} \dots\dots$$

او أي دوال تكون حاصل ضرب دوال اسية.[5]

3.4 ثانيا : طريقة تغير البارامترات لإيجاد (y_p) :

المعادلة التفاضلية $F(D)y = Q(x)$

لإيجاد (y_p) بطريقة تغير البارامترات

1- نوجد الحل (y_c) للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ وليكن $y_c = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

2- نغير البارامترات بحيث $C_2 = u(x)$ ، $C_1 = V(x)$

3- فيكون $y_p = Vy_1 + uy_2$ $y_p = V(x)y_1(x) + u(x)y_2(x)$

بالتعويض في المعادلة الاصلية

$$y_p' = Vy_1' + uy_2' + (V'y_1 + u'y_2)$$

$$\therefore V'y_1 + u'y_2 = 0 \qquad \rightarrow (1) \therefore y_p' = Vy_1' + uy_2'$$

$$\therefore V'y_1' + u'y_2' = Q(x) \qquad \rightarrow (2) \ \ y_p'' = Vy_1'' - uy_2'' + (V'y_1' + u'y_2')$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) لإيجاد $V(x)$ ،$u(x)$ بطريقة كرامر : $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(x) \end{bmatrix}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \rightarrow W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

ويسمى (W) محدد رونسكيان

لان y_1 ، y_2 حلان مستقلان $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$

نوجد $\therefore u'(x), V'(x)$ $V'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \rightarrow V' = \frac{-y_2 Q(x)}{W}$ $V = -\int \frac{y_2 Q(x) dx}{W}$

$$\rightarrow u' = \frac{y_1 Q(x)}{W} u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & Q(x) \end{vmatrix}}{W} \therefore \quad u = \int \frac{y_1 Q(x)}{W} dx$$

فمثلا المعادلة التفاضلية $(y'' + 1)y = \tan x$

الحل المتجانس $(D^2+1)y = 0 \;\rightarrow\; D^2+1 = 0 \quad D = \pm i \therefore y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

لإيجاد (y_p) نغير البارامترات

$$y_c = V(x)\cos x + u(x)\sin x \therefore \; W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \therefore \; V = -\int \frac{\sin x . \tan x dx}{1} = -\int \sin x . \tan x \, dx$$

$$\therefore \quad V(x) = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$u(x) = \int \cos x \tan x \, dx = \int \sin x dx \; = -\cos x \therefore y_p = \cos x\,(\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) - \sin x \cos x \therefore y_p = (-\cos x)\ln|\sec x + \tan x|$$

∴ الحل العام هو $y_G = y_c + y_p$

$$\therefore y_G = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x| \; + C$$

ملاحظة : طريقة تغيير البارامترات تعتبر من افضل الطرق لإيجاد (y_p) لأنها تصلح مهما كانت الدالة ($Q(x)$) ، خلاف الطريقة السابقة التي لا يمكن بها ايجاد (y_p)

اذا كانت $Q(x) = \cot ax$ او $Q(x) = \tan ax$

او $Q(x) = \csc ax$ او $Q(x) = \sec ax$ او $Q(x) = \ln x$ او $Q(x) = \frac{1}{x}$ . . . .الخ.. **[10][2]**

4.4 ثالثا طريقة المؤثر التفاضلي $F(D)$ لإيجاد (y_p) :

المعادلة التفاضلية $F(D) = Q(x)$

لإيجاد الحل الخاص (y_p) بطريقة المؤثر التفاضلي $F(D)$ نتطرق الى الحالات الاتية :

(أ) اذا كانت $Q(x) = e^{ax}$ $\qquad F(D)y = e^{ax}$

$$y = \frac{e^{ax}}{F(D)} \qquad if \quad F(a) \neq 0 \;\rightarrow\; y_p = \frac{e^{ax}}{F(a)}$$

واذا كانت $F(a) = 0$ فانه يمكن ايجاد (y_p) بالطرق الاخرى .

فمثلا : $(D^2 + 3D + 2)y = e^{3x}$

$$\therefore \; y = \frac{e^{3x}}{D^2+3D+2} \;\rightarrow\; y_p = \frac{e^{3x}}{(3)^2+3(3)+2} \;\rightarrow\; y_p = \frac{1}{20}e^{3x}$$

(ب) اذا كان $Q(x) = x^n$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة (n) فان : $y = \frac{x^n}{F(D)}$ $\qquad F(D)y = x^n$

$\therefore\ y_p = (F(D))^{-1}x^n$

باستخدام طريقة ماكلورين او نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(F(D))^{-1}$ بحيث $F(0) \neq 0$

$$(F(D))^{-1} = [F(0) + DF'(0) + \frac{D^2F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{D^nF^n(0)}{n!}] \therefore y_p = [a_0 + a_1D^1 + a_2\frac{D^2}{2!} + a_3\frac{D^3}{3!} + \cdots + a_n\frac{D^n}{n!}]x^n$$

فمثلا المعادلة التفاضلية $(y'' + 4)y = x^2$

$$(D^2+4)y = x^2 \rightarrow y = \frac{x^2}{(D^2+4)} \rightarrow y_p = (D^2+4)^{-1}x^2$$

بطريقة ماكلورين نوجد مفكوك $(F(D))^{-1} = (D^2+4)^{-1}$

$$(D^2+4)^{-1} = F(0) + DF\ \ (0) + \frac{D^2F\ \ (0)}{2!} + \cdots + \frac{D^nF\ \ (0)}{n!} \therefore\ F(0) = (4)^{-1} = \frac{1}{4}F'(D) = -(D^2+4)^{-2}(2D)F'(0) = 0\ \ F''(D)$$
$$= -(D^2+4)^{-2}(2) + (2D)(2)(D^2+4)^{-3}F''(0) = -\frac{1}{8} \therefore y_p = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\frac{D^2}{2!}\right)x^2 \rightarrow y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}D^2x^2$$
$$\therefore y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

ملاحظة : عند ايجاد مفكوك $(F(D))^{-1}$ يجب ان تكون درجة الدالة [3] تساوي درجة المؤثر (D) فمثلا اذا كان $Q(x) = x^3$ فان مفكوك

$$(F(D))^{-1} = [F(0) + DF\ \ (0) + \frac{D^2}{2!}F\ \ (0) + \frac{D^3}{3!}F\ \ (0)]$$

(ج) اذا كانت $Q(x) = \cos ax$ or $Q(x) = \sin ax$

(1)

$F(D)y = \sin ax$ or $F(D)y = \cos ax$ $y = \frac{\sin ax}{F(D)} \rightarrow y = \frac{\sin ax}{F(D^2)}$ $if\ \ F(-a^2) \neq 0 \rightarrow y_p = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}$ $F(D)y = \cos ax \rightarrow y = \frac{\cos ax}{F(D)} \rightarrow y_p = \frac{\cos ax}{F(D^2)} \rightarrow if\ \ F(-a^2) \neq 0 \rightarrow y_p = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$

فمثلا $(D^2 + 2D + 1)y = \cos 2x$

$\therefore\ y = \frac{\cos 2x}{D^2+2D+1} \rightarrow y_p = \frac{\cos 2x}{-2^2+2D+1} \rightarrow y_p = \frac{\cos 2x}{2D-3} \therefore y_p = \frac{(2D+3)\cos 2x}{4D^2-9} \rightarrow y_p = (2D+3)\left(\frac{\cos 2x}{4D^2-9}\right) \therefore y_p = (2D+3)\left(\frac{\cos 2x}{4(-2^2)-9}\right) = (2D+3)\left(\frac{\cos 2x}{-25}\right) = -\frac{1}{25}(2D+3)(\cos 2x) = -\frac{1}{25}(2D\cos 2x + 3\cos 2x) = -\frac{1}{25}(-4\sin 2x + 3\cos 2x)$

$$\therefore y_p = \frac{1}{25}(4\sin 2x - 3\cos 2x)$$

(2) اذا كان $F(D)y = \sin ax$ or $F(D)y = \cos ax$

اذا كانت المعادلة $F(D)y = \cos ax$

$$y = \frac{\cos ax}{F(D)} \rightarrow y_p = \frac{\cos ax}{F(D^2)} = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$$
$$if\ \ F(-a^2) = 0\ \ then\ \ y_p = \frac{x\sin ax}{2a}$$

فمثلا $(D^2+4)y=\cos 2x$

$$y=\frac{\cos 2x}{D^2+4} \rightarrow y_p=\frac{\cos 2x}{-2^2+4} \quad F(-2^2)=0$$

$$\therefore y_p=\frac{x\sin 2x}{2(2)} \rightarrow y_p=\frac{1}{4}x\sin 2x$$

اذا كان $F(D)y=\sin ax$

$$y=\frac{\sin ax}{F(D)} \rightarrow y_p=\frac{\sin ax}{F(D^2)}=\frac{\sin ax}{F(-a^2)}$$

$$F(-a^2)=0 \rightarrow y_p=\frac{-x\cos ax}{2a} if$$

فمثلا $(D^2+9)y=\sin 3x$

$$y=\frac{\sin 3x}{(D^2+9)} \rightarrow y_p=\frac{\sin 3x}{(-3^2+9)}=\frac{\sin 3x}{0}$$

$$F(-3^2)=0 \rightarrow y_p=\frac{-x\cos 3x}{2(3)}$$

$$\therefore y_p=-\frac{1}{6}x\cos 3x$$

(د) اذا كان $Q(x)=e^{ax}V(x)$

$$)F(D)y=e^{ax}V(x) \rightarrow y_p=e^{ax}(\frac{V(x)}{F(D+a)}$$

فمثلا $y''-y=e^x\sin 2x$

$$(D^2-1)y=e^x\sin 2x \rightarrow y=\frac{e^x\sin 2x}{D^2-1}$$

$$e^x(\frac{1}{D})\left(\frac{\sin 2x}{D+2}\right)\therefore y_p=e^x\left(\frac{\sin 2x}{(D+1)^2-1}\right)=e^x\left(\frac{\sin 2x}{D^2+2D}\right)=y_p=e^x\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{(D-2)(\sin 2x)}{D^2-4}\right)$$

$$=e^x\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{(D-2)(\sin 2x)}{-2^2-4}\right)y_p=e^x(D^{-1})\left(\frac{(D-2)(\sin 2x)}{-8}\right)=e^x(1-2D^{-1})\left(\frac{(\sin 2x)}{-8}\right)\therefore y_p$$

$$=-\frac{1}{8}e^x[\sin 2x+\cos 2x]$$

ملاحظة: $D^{-1}f(x)=\int f(x)dx$

(هـ) اذا كان $Q(x)=x\ V(x)$

$$F(D)y=x\,V(x)$$

$$\therefore y_p=x\frac{V(x)}{F(D)}-V(x)\frac{F'(D)}{(F(D))^2}$$

فمثلا $y''+9y=x\cos x$

$$(D^2+9)y=x\cos x \rightarrow y=\frac{x\cos x}{(D^2+9)}$$

$$y_p=x\left(\frac{\cos x}{(D^2+9)}\right)-\cos x(\frac{2D}{(D^2+9)^2})$$

$$y_p=x\left(\frac{\cos x}{(-1^2+9)}\right)-\cos x(\frac{2D}{(-1^2+9)^2})$$

$$= \frac{1}{8} x \cos x - \frac{D \cos x}{32}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{32}[4x \cos x + \sin x]$$

ملاحظة : طريقة المؤثر $F(D)$ لا يمكن بها ايجاد (y_p) اذا كانت الدالة : $Q(x) = \cot x$ or $Q(x) = \tan x$

$Q(x) = \sec x$ or $Q(x) = \csc x$

[6][1]$Q(x) = \ln x$ or $Q(x) = \frac{1}{x}$ ……. etc

5. الخلاصة:

– هذه الورقة البحثية فكرة عن حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ، والمقارنة بين هذه الحلول واختيار الحل الافضل وفقا لآراء مؤلفو المراجع المذكورة انفا وأراء الباحثين في هذه الورقة حيث وجد ان أفضل الحلول هو الحل بطريقة تغاير البارامترات والتي تصلح مهما كان نوع الدالة في الطرف الايمن او كانت المعاملات دوال متغيرة.

المراجع :

(1) أ.د. مصطفى حسن – "المعادلات التفاضلية النظريات والحلول والتطبيقات" – (2004).
(2) وليم يوليس , ريتشارد ديريما – "مبادي المعادلات التفاضلية" – ترجمة احمد علاونة – مركز الكتب الاردني (1990).
(3) احمد حمزة الشيخة – "المعادلات التفاضلية" – جامعة سبها (1996).
(4) موراي شبجيل – "الرياضيات المتقدمة للمهندسين والعلميين" –
(5) ABell&BRASetor. "Modern.D.E" U.S.A (1996).
(6) WILFRED KAPLAN – "O.D.E" – Mechgan.U.S.A – (1967).
(7) B.V.RAMANA– "Higher Engineering Mathematics" – (2007).
(8) MORRIS TENENBAUM–HARRY POLLARD–"O.D.E" – (1964).
(9) GLYNJ AMES – "Modern Engineering Math" – (2010).
(10) FRANK AVRESJR – "D.E" – U.S.A(1972).