حالات الاستقرار وعدم الاستقرار في حلول المعادلات التفاضلية العادية

الزناتي منصور , الغروس محمد , البوسيفي عبدالنبي , التميمي عادل
القسم العام – كلية التقنية الهندسية / جنزور

الكلمات الاستدراكية: استقرار الحلول ، عدم الاستقرار ، عقدة مستقرة ، عقدة غير مستقرة ، نقطة سرجية ، بؤرة مستقرة ، بؤرة غير مستقرة ، النقطة الحرجة ، دوامة ، المرافق التخيلي ، حلزون.

الملخص

–يمكن تلخيص حالات استقرار الحلول للمعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى في متغيرين عند النقطة الحرجة $(x=0)$ كالاتي:

(1) الجذران $(\lambda_1 ، \lambda_2)$ للمعادلة المميزة قد يكونان حقيقيين سالبين في هذه الحالة يكون لدينا عقدة مستقرة $(stable-node)$ ، وقد يكونان حقيقيين موجبين وتكون النقطة عقدة غير مستقرة $(unstable-node)$.

(2) اما إذا كانت إحدى القيمتين أي الجذرين سالبة والاخرى موجبة $(\lambda_1<0 ، \lambda_2>0)$ فإن نقطة الاصل تكون نقطة سرجية $(Saddle-point)$ غير مستقرة .

(3) إذا كانت القيمتان الذاتيتان تخيليتين مترافقتين أي $(\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm i\beta)$ $(Imaginary-Conjugate)$ ففي هذه الحالة تكون النقطة $(x=0)$ نقطة مستقرة (حلزون).

(4) إذا كانت القيمتان عقدتين مترافقتين وكان الجزء الحقيقي سالبا فنحصل على بؤرة مستقرة $(Stable-focus)$ وعندما يكون الجزء الحقيقي موجبا تكون البؤرة غير مستقرة $(Unstable-focus)$.

(5) إذا كان جذري المعادلة المميزة متساويان موجبان $(\lambda_1=\lambda_2>0)$ فإن النقطة $(x=0)$ تكون عقدة فعلية غير مستقرة $(proper-node\ Unstable)$.

(6) إذا كان الجذران $(\lambda_1=\lambda_2<0)$ فإن النقطة تكون عقدة غير فعلية $(Improper-node)$ وتكون غير مستقرة تقاربياً.

(7) في حالة الجذرين التخيليين إذا كانت $(\alpha>0)$ فإنها تكون حلزون وغير مستقر .

(8) في حالة الجذرين التخيليين اذا كانت $(\alpha<0)$ فإن النقطة $(x=0)$ تكون مستقرة تقاربياً (حلزون) $(Spiral-point)$.

(9) في حالة الجذرين تخيليين $(\alpha=0)$ تكون $(x=0)$ مستقرة وتسمى دوامة $(Center)$.

1. مقدمة:

تتناول هذه الورقة البحثية دراسة استقرار حلول المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى في متغيرين تابعين (x,y) بالنسبة لمتغير مستقل واحد هو الزمن (t) في المستوى $(\Re^3)$ وطبقا للشروط ا لابتدائية وقد تم أحيانا التعبير عن حلول هذه المعادلات في صورة بارامترية باعتبار (t) بارامتر يربط بين (x,y) وفي هذه الحالة يتم التعبير عن هذه الحلول في المستوى $(\Re^2)$ فقط وتخضع عملية استقرار الحلول إلى نوع جذري المعادلة المميزة ما إذا كانوا موجبين معا أو سالبين معا وهل هما متساويين أم مختلفين وما إذا كانا حقيقيين أم تخيليين وهنا تظهر عدة حالات للاستقرار أو عدم الاستقرار.[3,4]

نعلم أن المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى تكون على الصورة:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(t,x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(t,x,y)\end{aligned}\right\}\qquad [I]$$

وبفرض أن $x=x(t) ، y=y(t)$ حلان للمعادلة $[I]$ اللذان يحققان الشرطين الابتدائيين: $[II]$

$$\left.\begin{aligned}X|_{t=0}&=x_0\\ Y|_{t=0}&=y_0\end{aligned}\right\}$$

وبفرض أن $\overline{X}=\overline{x}(t)$ ، $\overline{Y}=\overline{y}(t)$ هما حلان للمعادلتين $[I]$ اللذان يحققان الشرطين الابتدائيين:

$$\left.\overline{X}\right|_{t=0}=\overline{x}_0 \quad ، \quad \left.\overline{Y}\right|_{t=0}=\overline{y}_0$$

إذن الحلين $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ يحققان المعادلة $[I]$ والشرطين الابتدائيين $[II]$ يسميان حلين مستقرين عندما $(t\to\infty)$

إذا وجد لكل عدد $(\varepsilon>0)$ ، يوجد عدد آخر $(\delta>0)$ بحيث تتحقق لجميع قيم $(t>0)$ المتباينات التالية:

$$\left|\overline{X}(t)-x(t)\right|<\varepsilon \text{ ، } \left|\overline{Y}(t)-y(t)\right|<\varepsilon$$

إذا ما حققت الشروط الابتدائية للمتباينتين:

$$\left|\overline{X}_0-x_0\right|\le\delta \quad ، \quad \left|\overline{Y}_0-y_0\right|\le\delta$$

2. النقطة المفردة $Singular\ \ point$: هي النقطة التي يمر خلالها منحنيان تكامليان على الأقل ، أي هي النقطة التي لا تتحقق فيها وحدانية الحل للمعادلة التفاضلية إذا كان:

$$\left.\begin{aligned} y &= F_1(t,x,y) \\ x &= F_2(t,x,y) \end{aligned}\right\} \qquad [III]$$

حيث (t) أحداثي آخر أو ثالث بعد x ، y فإن F_1 ، F_2 تصف منحنى تكاملي (مسار) في المستوى $(\Re^3)$.

عندما نعتبر أن (t) وسيطا $(Parameter)$ وليس متغيرفإن المجموعة $[III]$ في هذه الحالة فيالمستوى $(\Re^2)$.

(بعد التخلص من (t) كوسيط) ويسمى المنحنى في هذه الحالة مستوى الطور (مستوى الحالة)**(** $Phase-plane$ **).**

3. مبرهنة (1): إذا كانت x_1 ، x_2 حلين خاصين ومستقلين خطيا للمعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية:

$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0, a_1,a_2\in\Re$ فإن التركيب $(X=C_1x_1+C_2x_2)$ (حيث C_1 ، C_2 ثوابت) يسمى تركيب خطي للمتغيرين x_1,x_2 يكونان حلا لنفس المعادلة.[2]

4. مبرهنة (2): إذا كانت المعادلة $\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0$ وكان جذرا المعادلة المميزة $(\lambda_1$ ، $\lambda_2)$ حقيقيانومتساويان ($\lambda=\lambda_1=\lambda_2$) فإن الحل يكون على الصورة:

$$x(t)=(C_1+C_2t)\ e^{\lambda t}$$

عندما تكون الجذور متكررة حتى لو كانت سالبة .

5. مبرهنة (3):إذا كانت كل القيم الذاتية للمصفوفة (A) هي $(\lambda_1,\lambda_2,.....\lambda_n)$ حقيقية ومختلفة فإنه توجد مصفوفة $(B$)بحيث:

$$ABA^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0\\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n\end{bmatrix}, (\Delta_B\neq 0)$$

6. دراسة حالات استقرار المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى في متغيرين التي علي الصورة:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1y\\ \frac{dy}{dt}&=a_2x+b_2y\end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

حيث a_1,a_2,b_1,b_2 ثوابت

ومن الواضح أن($x=0$ ، $y=0$)حل للمجموعة (I) لأن (الحل الصفري متجانس).[5]

1.6يمكن حل هذه المجموعة (I) بواسطة تحويلها إلي معادلة واحدة من الرتبة الثانية وتفاضلها بالنسبة إلى (t) كما يلي:

(a) إذا وجد حل آخر ويقترب من الحل الصفري فإن الحل الصفري يكون مستقر تقاربياً.

(b) إذا وجد حل آخرلا يقترب ولا يبتعد من الحل الصفري يكون مستقر فقط .

(c) أما إذا وجد حل آخر يبتعد عن الصفر كلما زادت قيمة $(t \to \infty)$ فإن الحل الصفري حل غير مستقر، فإن المعادلة المميزة تكون على الصورة: $\lambda^2 - (a_1 + b_2)\,\lambda - (b_1 a_2 - a_1 b_2) = 0$

وتكتب على الصورة $\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$

2.6يمكن حل المجموعة (I) عن طريق البحث عن الحل الخاص في الصورة: $x = c_1 e^{\lambda t}, y = c_2 e^{\lambda t}$

أي أن: $\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y$ وبالتعويض عن قيمة (y, x) نجد

$$\frac{d}{dt}\left(c_1 e^{\lambda t}\right) = a_1\left(c_1 e^{\lambda t}\right) + b_1\left(c_2 e^{\lambda t}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(c_2 e^{\lambda t}\right) = a_2\left(c_1 e^{\lambda t}\right) + b_2\left(c_2 e^{\lambda t}\right)$$

$c_1(a_1 - \lambda) + c_2 b_1 = 0$ ، $c_1 a_2 + c_2(b_2 - \lambda) = 0$ وهي مجموعة المعادلات الجبرية الخطية في المجاهيل $(c_2\ ، c_1)$

حيث: $\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

و المعادلة المميزة هي: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix}$

وهكذا نحصل على حلول غير بديهية لكل من (x, y) فقط عند قيم (λ) التي يكون عندها (Δ) مساويا للصفر ولتكن λ_2, λ_1 ومن هنا نلاحظ أنه يتحدد استقرار حلول المجموعة (I) أو عدم استقرارها بطبيعة الجذرين (λ_2, λ_1)عن طريق الحالات الاتية:

وتكون المعادلة المميزة هي: $\lambda^2 - (a + b)\,\lambda + (ad - bc) = 0$ [1]

7.حالات استقرار أو عدم استقرار الحلول:

1.7 الحالة الأولى:جذرا المعادلة المميزة حقيقيان سالبان ومختلفان$(\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، $\lambda_2 < 0$ ، $\lambda_1 < 0)$ ويكون مستقر تقاربياً

مثلا لبحث استقرار الحل $(x = 0$ ، $y = 0)$ للمعادلتين (i) $\frac{dx}{dt} = -x$

(ii) $\frac{dy}{dt} = -2y$

نوجد المعادلة المميزة لمجموعة المعادلات التفاضلية كالاتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

ويكون الحلين في هذه الحالة:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t}$$
$$y(t) = c_2 e^{\lambda t} \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-2t}$$
$$x|_{t=0} = c_1 \Rightarrow x_0 = c_1$$
$$y|_{t=0} = c_2 \Rightarrow y_0 = c_2$$

إذن الشروط الابتدائية هي: $\left.\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ y(t=0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$

فيكون $\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} \\ Y(t) &= c_2 e^{-2t} \end{aligned}\right\}$

وبالتعويض في المعادلتين من الواضح أنه عندما $(t \to \infty)$ فإن:

$\lim x(t) \to 0, \lim y(t) \to 0$ والحل عند $x=0$ ، $y=0$ (يكون مستقر تقاربياً)

ويمكن إيجاد معادلة المسار بالطريقة التالية:

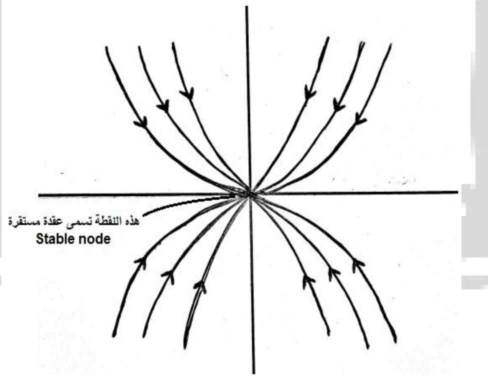
$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= -2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-x} \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على: $\ln y = 2\ln x + \ln c$

$$\ln y = \ln x^2 c \Rightarrow y = cx^2$$

وهي تمثل معادلات القطوع المخروطية المكافئة المارة بنقطة الأصل كما بالشكل 1.

بيانيا: $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0)$ الإشارة السالبة للجذرين تعني أن المسار متجه في كل حالة إلى نقطة الأصل.[7]



شكل 1.القطوع المخروطية المكافئة المارة بنقطة الأصل

2.7الحالة الثانية:جذرا المعادلة حقيقيان موجبان مختلفان أي أن: $(\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ ، $\lambda_2 > 0)$عقدة غير مستقرة

ويكون الحل على الصورة: $\left.\begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y &= c_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\}$ ونلاحظ أنه عندما $(t \to \infty)$ فإن:

$(y(t) \to \infty$ ، $x(t) \to \infty)$ أي أنه كلما زادت قيمة (t) فإن المسار يبتعد عن نقطة الأصل ، وعلى المستوى الطوري $(Phase-plane)$ تكون النقطة المفردة $(0,0)$ عقدة غير مستقرة $(Unstable-nade)$

مثلا لبحث الاستقرار عند $(y=0, x=0)$ للمعادلتين:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= 2y \end{aligned}$$

المعادلة المميزةهي $\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$\Delta = (1-\lambda)\,(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = 2$$

ويكون الحل للمعادلتين ثم التكامل نجد أن:

$$\frac{dx}{dt}=x\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt\Rightarrow\ln x=t+K_1$$
$$\Rightarrow x=e^{t+K_1}$$
$$\Rightarrow x=c_1e^t \qquad \rightarrow(1)$$
$$y=c_2e^{2t} \qquad \rightarrow(2)$$

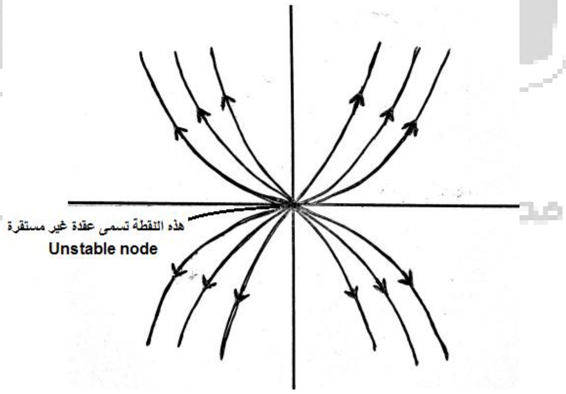
ومن الشروط الابتدائية($x=x_0$ ، $y=y_0$) عندما $(t=0)$ وبالتعويض في المعادلتين (1) ، (2) نجد أن:

$$x_0=c_1e^0\Rightarrow c_1=x_0$$
$$y_0=c_2e^0\Rightarrow c_2=y_0$$
$$\left.\begin{aligned}x&=x_0e^t\\ y&=y_0e^{2t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x^2&=x_0^2e^{2t}\\ y&=y_0e^{2t}\end{aligned}\right\}$$
$$\frac{x^2}{y}=\frac{x_0^2e^{2t}}{y_0e^{2t}}\Rightarrow\qquad x^2y_0=yx_0^2$$

وهي تمثل معادلة قطوع مكافئة تمر بنقطة الأصل كما بالشكل 2

$$\therefore\ y=Cx^2$$

عند $(t\rightarrow\infty)$ فإن $(x(t)\rightarrow\infty, y(t)\rightarrow\infty)$



شكل 2.القطوع المكافئة المارة بنقطة الأصل

3.7الحالة الثالثة: جذرا المعادلة المميزة جذران حقيقيان ومختلفا الإشارة أي أن:($\lambda_1>0$ ، $\lambda_2<0$)

عندما $(t\rightarrow\infty)$ فإن $(y(t)\rightarrow 0\ ,\ x(t)\rightarrow 0)$ السالبة تكون ذاهبة للصفر وتسمى في هذه الحالة بالنقطة المفردة السرجية $(Saddle-point)$ إذا كان $((a_1-\lambda_2)x_0+b_1y_0\neq 0)$ فإنالحل يكون غير مستقر $(unstable-solution)$ وإذا كان $((a_1-\lambda_2)x_0+b_1y_0=0)$ فإن الحل يكون مستقر $(stable-solution)$ وعلى المستوى الطوري تسمى النقطة المفردة (السرج $(Saddle-point)$.[6]

مثلا لبحث الاستقرار الصفري للمجموعة $\frac{dx}{dt}=x$

$$\frac{dy}{dt}=-2y$$
$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$\Rightarrow\lambda_1=1\ ,\ \ \lambda_2=-2$$
$$\Rightarrow(1-\lambda)\,(-2-\lambda)=0$$

وبالتالي يكون الحل: $x(t)=c_1e^{t} \Rightarrow c_1=x_0$

$$y(t)=c_2e^{-2t} \Rightarrow c_2=y_0$$

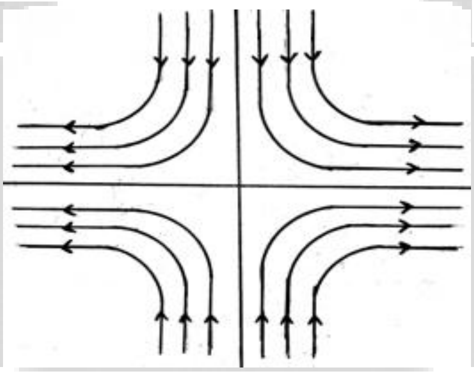
إذن الحل يكون غير مستقر وبالتربيع وضرب المعادلتين نحصل على:

$$\therefore X=x_0e^{t} \quad \& \quad Y=y_0e^{-2t}$$

لإيجاد معادلة المسار وبحذف البارامتر (t) نحصل على عائلة منحنيات في المستوى الطوري $(yx^2=y_0x_0^2)$ وهي تمثل معادلة قطع زائد كما بالشكل 3.

$$\lim_{t\to\infty} X(t)=\lim_{t\to\infty} x_0e^{t} \to \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} Y(t)=\lim_{t\to\infty} y_0e^{-2t} \to 0$$



شكل 3. معادلة قطع زائد

إذن الحل غير مستقر والنقطة المفردة (0.0) تكون سرجية وتكون:

$$X=e^{\alpha t}\left[c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t\right]$$

$$Y=e^{\alpha t}\left[c_2\cos\beta t-c_1\sin\beta t\right]$$

4.7 الحالة الرابعة: جذرا المعادلة المميزة مركبان بجزء حقيقي سالب ويكون الجذران مترافقين كالاتي:

$$\lambda_1=\alpha+i\beta \,\&\, \alpha<0 \;\; \lambda_2=\alpha-i\beta$$

ويكون الحل: $X=e^{\alpha t}\left[C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right]$

ملاحظة: إذا كانت $(\alpha<0)$ فإن الحلول تكون مستقرة ، أما إذا كانت $(\alpha>0)$ فإن الحلول تكون غير مستقرة.[6]

مثلا لبحث استقرار حل مجموعة المعادلتين:

$$\frac{dx}{dt}=-x+y$$

$$\frac{dy}{dt}=-x-y$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-1-\lambda)\,(-1-\lambda)+1=0$$

$$\therefore \lambda^2+2\lambda+2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta \quad \Rightarrow \alpha=-1,\beta=1$$

ويكون الحل:

$$X=e^{\alpha t}\left[C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right]$$

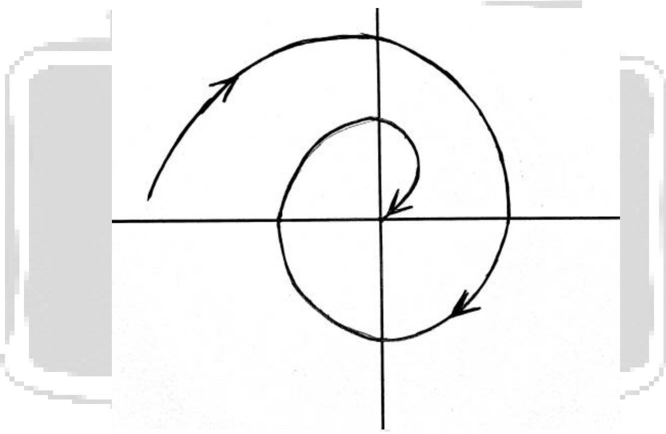
ومنها يكون:

$$X = e^{-t}\left[C_1 \cos t + C_2 \sin t\right]$$
$$Y = e^{-t}\left[C_2 \cos t - C_1 \sin t\right]$$
$$X\big|_{t=0} \Rightarrow C_1 = x_0 \,\&\, Y\big|_{t=0} \Rightarrow C_2 = y_0$$
$$\therefore X = e^{-t}\left(x_0 \cos t + y_0 \sin t\right) \& Y = e^{-t}\left(y_0 \cos t - x_0 \sin t\right)$$

$$(1)\ t = 0 \Rightarrow at \text{ ،} \left|x(t)\right| = \left|e^{-t}\left(x_0 \cos t + y_0 \sin t\right)\right| \qquad \left|x(t)\right| \le \left|e^{-t}\right|\left|x_0 \cos t\right| + \left|e^{-t}\right|\left|y_0 \sin t\right| \ \left|x(t)\right| \le \left|x_0\right| + \left|y_0\right|$$

$$\left|y(t)\right| \le \left|x_0\right| + \left|y_0\right| \qquad (2)$$

من $(1),(2)$ينتج أنه عندما $(\varepsilon > 0)$ يمكن اختيار$(|x_0|,|y_0|)$ قيمتين صغيرتين بدرجة تتحقق عندها لجميع قيم $(t > 0)$ والمتباينتين هما: $(|y(t)| < \varepsilon$ و $|x(t)| < \varepsilon)$ ، وعندما $(t \to \infty)$ فإن $(y(t) \to 0 \,\&\, x(t) \to 0)$
ويكون الحل مستقر , ومسار هذه المعادلة عبارة عن عدد غير منتهي من قطع المنحنيات (حلزون يقترب من النقطة $(0,0)$)
كما بالشكل 4.



شكل 4.النقطة المفردة $(0,0)$ بؤرة مستقرة *Asymptotic – stable spiral*

5.7 الحالة الخامسة:جذرا المعادلة المميزة مركبان بجزء حقيقي موجب أي أن:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \,\&\, \lambda_2 = \alpha - i\beta \,\&\, (\alpha > 0)$$

ويكون الحل $x(t) = e^{\alpha t}\left[C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right] \& \ y(t) = e^{\alpha t}\left[C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t\right]$

ولأي شرطين ابتدائيين (x_0, y_0) وعندما $(t \to \infty)$ فان $|x(t)|$, $|y(t)|$ يمكن أن تأخذ أية قيم كبيرة بمعني عندما $(t \to \infty)$ فإن $(x(t) \to \infty,\ y(t) \to \infty)$ ويكون الحل غير مستقر وفي المستوى الطوري تسمى النقطة المفردة بالبؤرة غير المستقرة
فمثلاالبحث استقرار حل مجموعة المعادلتين:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

يكون الحل $\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \therefore \lambda_1 = 1 + i \quad , \quad \lambda_2 = 1 - i$$
$$x(t) = e^{\alpha t}\left[C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right] \Rightarrow$$

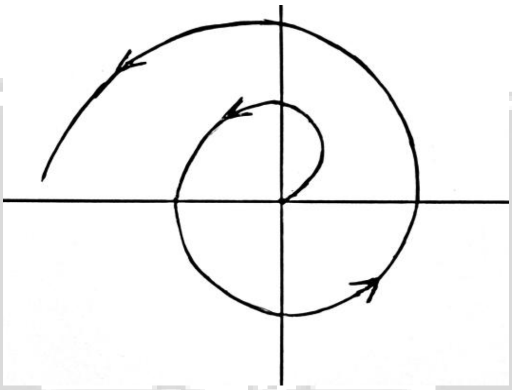
$$y(t) = e^{\alpha t}\left[C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t\right]$$

وعندما $\left(Y(t=0) \Rightarrow y_0 = C_2 \;\&\; X(t=0) \Rightarrow X_0 = C_1\right)$

أي أن الحل يكون على الصورة:

$$X(t) = e^{t}\left[x_0 \cos t + y_0 \sin t\right]$$
$$Y(t) = e^{t}\left[y_0 \cos t - x_0 \sin t\right]$$

وفي المستوى الطوري نحصل على منحنى معادلته في الاحداثيات القطبية ، والمسار عبارة عن عدد غير منتهي من قطع المنحنيات (حلزون غير مستقر) كما بالشكل 5.[6,7]



شكل 5.النقطة المفردة $(0,0)$ بؤرة غير مستقرة (حلزون غير مستقر)$(Unstable - spiral)$

6.7الحالة السادسة: جذرا المعادلة المميزة تخيليان والجزء الحقيقي $(\alpha = 0)$ويكون$(\lambda_1 = i\beta \;،\; \lambda_2 = -i\beta)$

وعندما$(\beta \neq 0 ، \alpha = 0)$ فإن حل المنظومة للمعادلات:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y$$
$$\frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y$$

يكون على صورة دوال دورية وتكون المسارات منحنيات مغلقة وتكون نقطة الاتزان $(rest - point)$ مستقرة وتسمى دوامة مستقرة $(Stable - Vortex)$ ولا يوجد استقرار تقاربي لأن الحل هو:

$$x = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$$
$$y = C_1^{*} \cos \beta t + C_2^{*} \sin \beta t$$

الحل لا يقترب من الصفر عندما $(t \to \infty)$.[8]

فمثلا لبحث استقرار الحل للمجموعة: $\frac{dx}{dt} = y$

$$\frac{dy}{dt} = -4x$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -2i \quad \& \quad \lambda_2 = 2i$$

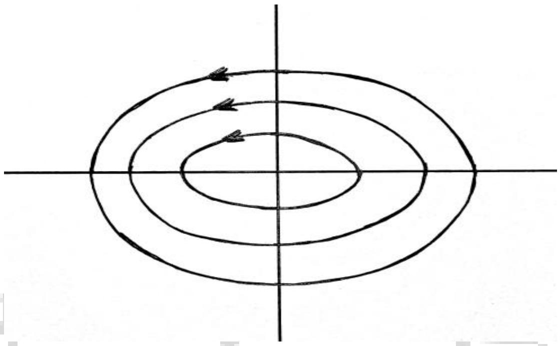
ويكون الحل

$$x = C\sin(2t+\delta)\ \&\ y = 2C\cos(2t+\delta)$$

وبحذف البارامتر (t) من المعادلتين وبتربيع الطرفين والجمع نحصل على:

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{4C^2}+\frac{x^2}{C^2}=1\ y^2=4C^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{4C^2}+\frac{x^2}{C^2}=1$$

وهي تمثل قطوع ناقصة والنقطة المفردة تكون مركزا $(Center)$ أي دوامة مستقرة $(Stable-Vertex)$ كما بالشكل 6.



شكل 6. دوامة مستقرة $(Stable-Vertex)$

7.7الحالة السابعة:إذا كانت $(\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2<0)$ فإن الحل يأخذ الصورة:

$$x = C_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\ \&\ y=\frac{1}{b_1}\left[-C_1a_1+C_2(\lambda_2-a_1)e^{\lambda_2 t}\right]$$

$$at \quad x|_{t=0}=C_1+C_2=x_0 \qquad (i)$$

$$y|_{t=0}=\frac{1}{b_1}\left[-C_1a_1+C_2(\lambda_2-a_1)\right]=y_0 \qquad (ii)$$

وبحل المعادلتين (i) , (ii) ومنها نوجد $(C_1\ ,\ C_2)$

$$\therefore C_1=\frac{\lambda_2x_0-b_1y_0-a_1x_0}{\lambda_2}\ \&\ C_2=\frac{b_1y_0+a_1x_0}{\lambda_2}$$

نلاحظ أنه لأي عدد $(\varepsilon>0)$ ولأي قيمة صغيرة صغرا كافيا للمقدارين $|x_0|$, $|y_0|$ يكون

$|y(t)|<\varepsilon\ \&\ |x(t)|<\varepsilon$ عند $t>0$

ويكون الحل مستقرا

فمثلا لبحث استقرار حل المجموعة: $\frac{dx}{dt}=0$

$$\frac{dy}{dt}=-y$$

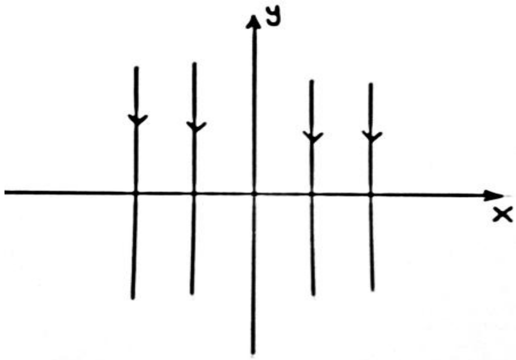
$$\Delta=\begin{vmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0\ \&\ \lambda_2=-1\ \lambda^2+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda+1)=0$$

$$\frac{dy}{dt}=-y \Rightarrow y=C_2e^{-t}\ \frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow x=C_1$$

عند الشرطين: $y|_{t=0}=y_0 \quad \& \quad x|_{t=0}=x_0$ أي أن $x(t)=x_0\ \&\ y(t)=y_0e^{-t}$

أي أن الحل مستقرا والمسارات هي مستقيمات موازية للمحور $(y=0)$ كما بالشكل 7.



شكل 7. مستقيمات موازية للمحور $(y=0)$

8.7 الحالة الثامنة:إذا كان جذرا المعادلة المميزة حقيقيان سالبان ومتساويان $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda \,\&\, \lambda<0)$

ويكون الحل مستقرا وهو : $y(t)=C_2e^{\lambda t} \quad \& \quad x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$ [6]

فمثلا لبحث استقرار الحل للمعادلتين:

$$\frac{dx}{dt}=-x$$
$$\frac{dy}{dt}=-y$$
$$\Delta=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)^2=0 \therefore \lambda_1=\lambda_2=-1$$

ويكون الحل بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{dt}=-x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=-dt$$
$$\frac{dy}{dt}=-y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-dt$$

وبالتكامل نحصل على

$$x(t)=C_1e^{-t} \,\&\, y(t)=C_2e^{-t}$$

وعندما $(t\to\infty)$فإن: $x(t)\to 0$, $y(t)\to 0$

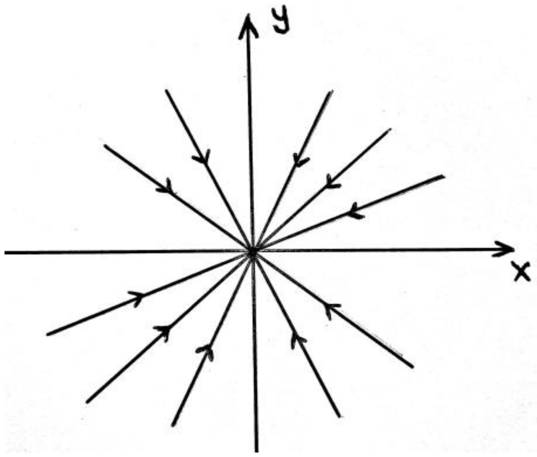
أي أن الحل $(y=0 \,\&\, x=0)$ مستقر

$$y(t=0) \quad \Rightarrow \quad C_2=y_0 \;\; x(t=0) \quad \Rightarrow \quad C_1=x_0$$
$$\therefore x(t)=x_0e^{-t} \qquad (1) \,\&\, y(t)=y_0e^{-t} \qquad (2)$$

وبحذف البارامتر (t) في المعادلتين (1) و (2) وذلك بقسمة حدود المعادلة (2) على (1)

$$\frac{y}{x}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{y_0}{x_0}K \quad \Rightarrow \quad y=Kx$$

تكون عائلة المنحنيات في المستوى الطوري$(y=Kx)$ كما بالشكل 8.



شكل 8. النقطة $(0,0)$ عقدة مستقرة

9.7الحالة التاسعة: جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان موجبان ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ، $\lambda > 0$)

ويكون الحل: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$ & $y(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{b_1}[C_1(\lambda - a_1) + C_2(1 + \lambda t - a_1 t)]$

وعندما ($t \to \infty$) فإن($y(t) \to \infty$, $x(t) \to \infty$)ويكون الحل($y = 0$, $x = 0$) غير مستقر.[8]

فمثلا لبحث استقرار الحل للمعادلتين:

$$\frac{dx}{dt} = x$$
$$\frac{dy}{dt} = y$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Delta = (1-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

ويكون الحل بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dt$$
$$\frac{dy}{dt} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dt$$
$$x(t) = C_1 e^t \ \& \ y(t) = C_2 e^t$$

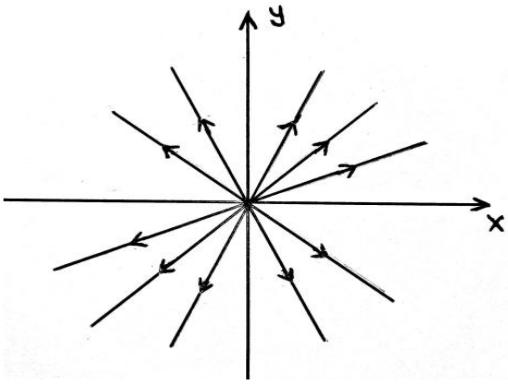
عندما ($t \to \infty$) فإن ($y(t) \to \infty$ ، $x(t) \to \infty$) لذلكفإن الحل عند ($x = 0$ ، $y = 0$) غير مستقر ويكون:

$$x(t=0) = C_1 = x_0 \quad ، y(t=0) = C_2 = y_0$$
$$x(t) = x_0 e^t \ \& \ y(t) = y_0 e^t$$

وبحذف البارامتر (t)نحصل على:

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} = k \quad \Rightarrow \quad x = ky$$

وهي تمثل عائلة المستقيمات التي تمر بنقطة الاصل والمبتعدة بعداً لا نهائياً عن نقطة الاصل ($x = Ky$)كما بالشكل 9.



شكل 9.النقطة $(0,0)$تسمىعقدة غير مستقرة

8. الخلاصة:نظرا لأهمية نظرية الاستقرار في مجالات الهندسة والاقتصاد والتحكم الالي وعلوم الفضاء وغيرها من العلوم ، نعرض في هذه الورقة البحثية موضوع استقرار حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى والتي تمخض عنها عرض تسع حالات عن نوعيات هذه الحلول منها المستقرة ومنها غير المستقرة وذلك حسب نوعية الجذور وهي كما يلي :
إذا كان جذرا المعادلة المميزة حقيقيين سالبين فإن المنحنيات تتجه إلى نقطة الاصل وينتج عنها عقدة مستقرة اما إذا كان الجذران حقيقيان موجبان فإن المنحنيات تتجه من نقطة الاصل إلى مالا نهاية وتكون عقدة غير مستقرة ، وعندما يكون احد جذري المعادلة المميزة مختلفي الاشارة فينتج عن ذلك نقطة سرجية وتكون الحلول غير مستقرة وعندما يكون الجذران تخيليين مترافقين تكون النقطة $(0,0)$ نقطة مستقرة ويكون المنحنى حلزون يتجه نحو هذه النقطة ، اذا كان الجذران تخيليين والجزء الحقيقي سالب فان الناتج بؤرة مستقرة وعندما يكون الجزء الحقيقي موجب تكون البؤرة غير مستقرة ، واذا كان الجذران موجبين متساويين فإن النقطة $(0,0)$ تكون عقدة فعلية غير مستقرة ، وعندما يكونا سالبين متساويين تكون عقدة غير فعلية غير مستقرة وإذا كانت $(\alpha > 0)$ في حالة الجذرين التخيليين فإنه ينتج منحنى حلزوني غير مستقر وعندما تكون $(\alpha < 0)$ فإن النقطة تكون مستقرة تقاربيا (بؤرة مستقرة) ، وإذا كانت $(\alpha = 0)$ والجذران تخيليان تكون دوامة ، وعندما يكون احد الجذور صفر تكون المنحنيات مستقيمات للمحور y.[1]

9. المراجع:

[1]بن الاشهر,علي","الاستقرار الرياضي _ مقاربة هندسية", الهيئة الليبية للبحث والعلوم والتكنولوجيا, 1990.
[2]J. Lasalle and S. Lefchetz, "stability by Liapunov's direct methods with applications", academic press, 1961.
[3]E. Coddingten and N. Levinson, "theory of ordinary differential equation", Mcgraw Hill, 1955.
[4]A.M.Benalashary, "final-stability theory", PhD. Thesis, 1971.
[5] A.M.Benalashary, "converse theorems for final stability", Maths.Appls, 1978.
[6] T. Yohizawa, "stability theory & the existence of periodic solutions & almost periodic solutions", springer- verlag, 1975.
[7] A.M. Benalashary, "converse theory for discrete - time systems", Libyan J. of science, 1990.
[8] K. Ogata, "modern control engineering", prentice hall, 1970.